Die Navier-Stokes-Gleichungen in Öffnungsgebieten

Vom Fachbereich Mathematik
der Technischen Universität Darmstadt
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)
genehmigte Dissertation

von
Dipl.-Math. Martin Franzke
aus Darmstadt

Darmstadt 2000
D17

Referent:	Prof. Dr. R. Farwig
Korreferent:	Prof. Dr. H. Sohr
Tag der Einreichung:	18.05.2000
Tag der mündlichen Prüfung:	29.06.2000

Berichte aus der Mathematik

Martin Franzke

Die Navier-Stokes-Gleichungen in Öffnungsgebieten

D 17 (Diss. TU Darmstadt)

Shaker Verlag
Aachen 2000

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Franzke, Martin:
Die Navier-Stokes-Gleichungen in Öffnungsgebieten /
Martin Franzke. Aachen : Shaker, 2000
(Berichte aus der Mathematik)
Zugl.: Darmstadt, Techn. Univ., Diss., 2000
ISBN 3-8265-7955-0

Printed in Germany.

ISBN 3-8265-7955-0
ISSN 0945-0882

Shaker Verlag GmbH • Postfach 1290 • 52013 Aachen
Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9
Internet: www.shaker.de • eMail: info@shaker.de

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachbereich Mathematik der TU Darmstadt.

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denen bedanken, die auf die eine oder andere Weise zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Insbesondere gilt mein Dank meinem Betreuer Herrn Prof. Farwig. Er ließ mir einerseits genügend Freiraum für eigene Ideen, war aber andererseits immer zur Stelle, wenn sein Rat gefragt war.

Herrn Prof. Sohr danke ich nicht nur für die Übernahme des Korreferats, sondern auch für viele wertvolle Hinweise, die das Entstehen meiner Arbeit wesentlich beeinflußt haben.

Nicht zuletzt möchte ich den Mitgliedern meiner Arbeitsgruppe für einen ständig stattfindenden Gedankenaustausch und viele fruchtbare Diskussionen danken.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Navier-Stokes-Gleichungen beschreiben die Strömung eines inkompressiblen, viskosen Fluids.

Ausgangspunkt für ihre Herleitung ist eine Massen- und Impulsbilanz sowie die Annahme, daß es sich bei dem Fluid um ein Kontinuum handelt:

Es bezeichne $u(x,t)$, bzw. $\rho(x,t)$ die Geschwindigkeit bzw. Massendichte der Strömung zum Zeitpunkt t am Ort x und $p(x,t)$ den dort herrschenden Druck. Weiterhin sei $T(x,t)$ der Spannungstensor sowie $F(x,t)$ die äußere Volumenkraft. Dann lautet die Impulsbilanz

$$\Big(\partial_t + u \cdot \nabla\Big)(\rho u) = \operatorname{div}(T - pI) + F$$

sowie die Massenerhaltung

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0.$$

Nun benötigt man noch gewisse konstitutive Gesetze. Nimmt man an, daß es sich um ein Newtonsches Fluid handelt, daß also die durch die Viskosität verursachten Reibungskräfte proportional zu ∇u sind, so erhält man für den Spannungstensor

$$T = \nu\rho(\nabla u + \nabla u^T).$$

Nimmt man weiterhin an, daß es sich um ein inkompressibles Fluid handelt, so folgt

$$\rho(x,t) = \rho_0.$$

Skaliert man schließlich die äußere Kraft durch $F = \rho_0 f$, dann erhält man aus den Bilanzgleichungen die Navier-Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned} u_t - \nu\Delta u + u\cdot\nabla u + \nabla p &= f, \\ \operatorname{div} u &= 0. \end{aligned}$$

Zusätzlich gibt man noch eine Anfangsbedingung

$$u|_{t=0} = u_0$$

vor. Findet die Strömung in einem begrenzten Gebiet Ω statt, so fordert man an dessen Rand die Haftbedingung

$$u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Das eben formulierte Anfangs-Randwertproblem der Navier-Stokes-Gleichungen ist ein wichtiges Modellproblem für nichtlineare partielle Differentialgleichungen. Trotz großer mathematischer Anstrengungen ist es bis heute nicht gelungen, die Frage nach Existenz, Eindeutigkeit und Regularität von Lösungen dieser Gleichungen befriedigend zu beantworten.

Hierbei hat sich gezeigt, daß die Gestalt des Gebietes eine große Rolle spielt. In dieser Arbeit sollen sogenannte Öffnungsgebiete untersucht werden. Diese bestehen, anschaulich gesprochen, aus zwei Halbräumen, die durch eine Wand getrennt, aber durch eine in dieser befindliche Öffnung miteinander verbunden sind.

Bei diesen Gebieten tritt eine zusätzliche Schwierigkeit auf:

Die Strömung wird durch das obige Anfangs-Randwertproblem nicht vollständig beschrieben. Man muß deshalb eine zusätzliche Randbedingung fordern, um die Eindeutigkeit der Lösung sicherzustellen. Dies kann entweder der Fluß durch die Öffnung, oder die Druckdifferenz zwischen den beiden Halbräumen sein.

Dieses Phänomen soll nun kurz erläutert werden. Die folgenden Überlegungen sind jedoch rein formal und dienen nur dem Verständnis. Deshalb werden sie exemplarisch am einfachsten Beispiel, den stationären Stokes-Gleichungen

$$
\begin{aligned}
-\Delta u + \nabla p &= f, \\
\operatorname{div} u &= g, \\
u|_{\partial\Omega} &= 0,
\end{aligned}
$$

durchgeführt:

Da die Gleichungen linear sind, ist ihre Lösung eindeutig, falls die homogenen Gleichungen nur die triviale Lösung zulassen.

Sei also $f = g = 0$ und Ω zunächst beschränkt. Multipliziert man die erste Gleichung mit u und integriert über Ω, so erhält man mit Hilfe des Gaußschen Satzes und der beiden anderen Gleichungen formal

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = 0,$$

also $u = \text{const}$. Aufgrund der Randbedingung folgt $u = 0$ und aus der ersten Gleichung $\nabla p = 0$. Folglich ist die Lösung $(u, \nabla p)$ der stationären Stokes-Gleichungen auf beschränkten Gebieten eindeutig.

In unbeschränkten Gebieten muß man die Integrabilität des Druckes p genauer untersuchen. Hierbei zeigt sich, daß im Ganz- bzw. Halbraumfall sowie in Außenraumgebieten der Druck im Unendlichen gegen eine Konstante strebt, womit sich die obigen Eindeutigkeitsüberlegungen übertragen. Im Falle eines Öffnungsgebietes strebt jedoch der Druck p auf beiden Seiten der Wand für $|x| \to \infty$ gegen im allgemeinen verschiedene Konstanten p_+ bzw. p_-. Bezeichnet $[p] = p_+ - p_-$ die Druckdifferenz und $\Phi(u)$ den Fluß durch die Öffnung, so erhält man wie oben für die Lösungen der homogenen Stokes-Gleichungen

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = [p]\Phi(u).$$

Dies impliziert die folgende Eindeutigkeitsaussage: Sind $(u_1, \nabla p_1)$ und $(u_2, \nabla p_2)$ zwei Lösungen der Stokes-Gleichungen zu denselben Daten *und* gilt $[p_1] = [p_2]$ *oder* $\Phi(u_1) = \Phi(u_2)$, so sind die beiden Lösungen identisch.

Das gleiche Verhalten zeigt sich auch im nichtlinearen und instationären Fall.

Diese Arbeit befaßt sich hauptsächlich mit den instationären Stokes- und Navier-Stokes-Gleichungen. Grundlage für die Konstruktion von Lösungen ist die sogenannte Halbgruppen-Methode, die im folgenden am Beispiel eines beschränkten Gebietes kurz beschrieben werden soll:

Gegeben seien die Stokes-Gleichungen in einem beschränkten Gebiet Ω:

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u + \nabla p &= f, \\ \operatorname{div} u &= 0, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \\ u|_{t=0} &= u_0. \end{aligned}$$

Man kann zeigen, daß eine Projektion P mit den Eigenschaften $P\nabla p = 0$ und $Pu = u$ für Vektorfelder mit $\operatorname{div} u = 0$ und $u|_{\partial\Omega} = 0$ existiert. Wendet man diese Projektion auf die erste Gleichung an, so erhält man die abstrakte Stokes-Gleichung

$$u_t + Au = Pf, \qquad u(0) = u_0.$$

Hierbei ist $A = P(-\Delta)$ der sogenannte Stokes-Operator. Dies ist formal eine gewöhnliche Differentialgleichung, deren Lösung die Darstellung

$$u(t) = e^{-tA}u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A} Pf(s)\, ds$$

besitzt.

Unter geeigneten Voraussetzungen kann man zeigen, daß A der Erzeuger einer sogenannten Halbgruppe e^{-tA} und die obige Funktion u die eindeutige Lösung der abstrakten Stokes-Gleichung ist.

Nun gewinnt man den Druck aus den Stokes-Gleichungen vermöge

$$\nabla p = (I - P)(f + \Delta u)$$

zurück und stellt fest, daß $(u, \nabla p)$ die eindeutige Lösung der Stokes-Gleichungen ist.

Zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u + u\cdot\nabla u + \nabla p &= f, \\ \operatorname{div} u &= 0, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \\ u|_{t=0} &= u_0 \end{aligned}$$

faßt man die Nichtlinearität als rechte Seite auf und erhält damit für u die Integralgleichung

$$u(t) = e^{-tA}u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A} P\Big(f - u\cdot\nabla u\Big)(s)\, ds\,.$$

Zu deren Lösung verwendet man eine Fixpunktiteration, wobei man die Konvergenz mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes zeigt.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in folgende Teile:

Das erste Kapitel beginnt mit einer Festlegung der grundlegenden Notation. Anschließend werden die für die Navier-Stokes-Gleichungen relevanten Funktionenräume vorgestellt und, vor allem im Hinblick auf die Besonderheiten in Öffnungsgebieten, untersucht.

Im nächsten Kapitel werden in Abhängigkeit von der zusätzlichen Randbedingung die zugehörigen Helmholtz-Projektionen und Stokes-Operatoren konstruiert. Anschließend werden die entsprechenden Resolventengleichungen untersucht.

Im dritten Kapitel wird zunächst die Theorie der analytischen Halbgruppen bereitgestellt. Die Abschätzung der Resolvente der Stokes-Operatoren zeigt, daß diese Erzeuger analytischer Halbgruppen sind. Damit erhält man die eindeutige Lösbarkeit der instationären Stokes-Gleichungen mit vorgeschriebener Druckdifferenz bzw. vorgeschriebenem Druck.

Das darauffolgende Kapitel befaßt sich der Konstruktion von Lösungen der instationären Navier-Stokes-Gleichungen. Mit Hilfe der Halbgruppen-Theorie erhält man starke Lösungen, deren Existenz jedoch nur für ein kleines Zeitintervall garantiert werden kann, es sei denn die Daten sind hinreichend klein. Anschließend werden schwache Lösungen konstruiert, deren Eindeutigkeit jedoch nicht gewährleistet ist. Schließlich wird der Eindeutigkeitssatz von Serrin auf Öffnungsgebiete übertragen.

Das fünfte Kapitel ist der Untersuchung der Regularitätseigenschaften des Stokes--Operators gewidmet. Die gewonnenen Erkenntnisse können verwendet werden, die Regularität der Stokes- und Navier-Stokes-Gleichungen zu zeigen.

Das sechste Kapitel dient dazu, auf einer abstrakten Ebene mit Hilfe der Theorie positiver Operatoren und der Interpolationstheorie weitere Erkenntnisse über den Stokes-Operator zu gewinnen.

Diese werden im letzten Kapitel genutzt, um weitere Regularitätseigenschaften der Stokes-Gleichungen zu erhalten: Es werden $L^q - L^r$ Abschätzungen der Stokes-Halbgruppe angegeben. Weiterhin wird den schwachen Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen ein Druck zugeordnet und analysiert. Schließlich wird in einem letzten Abschnitt das Abklingverhalten der Lösungen für $t \to \infty$ untersucht.