

Berichte aus der Mathematik

Martin Franzke

**Die Navier-Stokes-Gleichungen
in Öffnungsgebieten**

D 17 (Diss. TU Darmstadt)

Shaker Verlag
Aachen 2000

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Franzke, Martin:

Die Navier-Stokes-Gleichungen in Öffnungsgebieten/

Martin Franzke. Aachen : Shaker, 2000

(Berichte aus der Mathematik)

Zugl.: Darmstadt, Techn. Univ., Diss., 2000

ISBN 3-8265-7955-0

Copyright Shaker Verlag 2000

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 3-8265-7955-0

ISSN 0945-0882

Shaker Verlag GmbH • Postfach 1290 • 52013 Aachen

Telefon: 02407/95 96 - 0 • Telefax: 02407/95 96 - 9

Internet: www.shaker.de • eMail: info@shaker.de

Die Navier-Stokes-Gleichungen in Öffnungsgebieten

Martin Franzke

Die Navier-Stokes-Gleichungen beschreiben die Strömung eines inkompressiblen, viskosen Fluids in einem Gebiet Ω . Sie lauten

$$u_t - \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(0) = u_0,$$

wobei $u(x, t)$ die Geschwindigkeit des Fluids zum Zeitpunkt t am Ort x und $p(x, t)$ den dort herrschenden Druck bezeichnet.

Ein Öffnungsgebiet besteht aus zwei Halbräumen, die durch eine Wand getrennt, aber durch eine darin befindliche Öffnung miteinander verbunden sind.

Im Gegensatz zu einem beschränkten Gebiet oder einem Außenraum muß man in diesem Fall noch eine zusätzliche Randbedingung fordern, um die Eindeutigkeit der Lösung sicherzustellen. Dies kann entweder die Druckdifferenz $[p]$ zwischen den beiden Halbräumen oder der Fluß $\Phi(u)$ durch die Öffnung sein.

In dieser Arbeit wird das vorliegende Problem mit Hilfe der Halbgruppenmethode in L^q untersucht. Zunächst werden geeignete Funktionenräume eingeführt und analysiert. Anschließend wird in Abhängigkeit von der zusätzlichen Randbedingung die zugehörige Helmholtz-Projektion sowie der Stokes-Operator definiert. Die Resolventenabschätzungen zeigen, daß die Stokes-Operatoren Erzeuger analytischer Halbgruppen sind.

Man erhält die Existenz und Eindeutigkeit der Stokes-Gleichungen in Öffnungsgebieten, falls man eine der beiden zusätzlichen Randbedingungen vorschreibt.

Anschließend wird die Existenz und Eindeutigkeit der entsprechenden Navier-Stokes-Gleichungen untersucht. Allerdings kann nur die lokale Existenz in der Zeit bewiesen werden, außer die vorgegebenen Daten sind hinreichend klein. Die Konstruktion schwacher Lösungen liefert globale Resultate; jedoch kann die Eindeutigkeit nicht mehr garantiert werden. Allerdings läßt sich der Eindeutigkeitssatz von Serrin auch auf Öffnungsgebiete übertragen.

Außerdem werden in dieser Arbeit noch weitere Regularitätseigenschaften bewiesen: Es wird gezeigt, daß die Lösungen der Stokes-Gleichungen im wesentlichen so regulär sind, wie die Daten es zulassen. Außerdem wird den schwachen Lösungen ein Druck zugeordnet und dessen Regularität untersucht. Hierbei benötigt man ganz wesentlich die zuvor definierten gebrochenen Potenzen des Stokes-Operators, sowie die Resultate über deren Definitionsbereich. Weiterhin werden L^q - L^r -Abschätzungen der Stokes-Halbgruppe angegeben. Zum Schluß wird das Abklingverhalten der Lösungen in der Zeit untersucht.