

Die verschiedenen Formen und Funktionen
des zentralen Grenzwertsatzes
in der Entwicklung von der klassischen
zur modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung

Hans Fischer

Berichte aus der Mathematik

Hans Fischer

**Die verschiedenen Formen und
Funktionen des zentralen Grenzwertsatzes
in der Entwicklung von der klassischen zur
modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung**

Shaker Verlag
Aachen 2000

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Fischer, Hans:

Die verschiedenen Formen und Funktionen des zentralen
Grenzwertsatzes in der Entwicklung von der klassischen
zur modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung/Hans Fischer.

Aachen : Shaker, 2000

(Berichte aus der Mathematik)

Zugl.: München, Univ., Diss., 1999

ISBN 3-8265-7767-1

Copyright Shaker Verlag 2000

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen
oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungs-
anlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 3-8265-7767-1

ISSN 0945-0882

Shaker Verlag GmbH • Postfach 1290 • 52013 Aachen

Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9

Internet: www.shaker.de • eMail: info@shaker.de

Danksagung

An erster Stelle gebührt mein Dank Herrn Prof. Dr. Ivo Schneider, München, für seine anhaltende und wohlwollende Unterstützung bei der Entstehung dieses Buchs. Er hat nicht nur in zahlreichen Diskussionen immer wieder sehr nützliche Hinweise gegeben und mich wiederholt aus seinem reichen Fundus an Quellenmaterial versorgt, sondern insgesamt in sehr persönlicher Weise meine wissenschaftliche Arbeit gefördert.

Zu sehr großem Dank bin ich auch Herrn Prof. Dr. Ulrich Oppel, München, für ebenso zahlreiche wie wertvolle fachliche Hinweise verpflichtet.

Herr Prof. Dr. Hans-Joachim Roßberg, Leipzig, hat mir einige sehr nützliche Informationen bezüglich der modernen Entwicklung des zentralen Grenzwertsatzes gegeben.

Den Herren Professoren Dr. Michael Falk und Dr. Paul Ressel, den Herren Privatdozenten Dr. Frank Marohn und Dr. Günther Wirsching, Herrn Dr. Ulrich Hirth und Herrn Dr. Elevation Symeonidis (alle Eichstätt) danke ich für manche interessante und mir sehr hilfreiche mathematische Diskussion.

Frau Tina Johannesson, Kopenhagen, hat mich freundlicherweise an ihren Lesefrüchten aus russischen Original- und Sekundärquellen teilhaben lassen.

Besonders danken möchte ich Herrn Prof. Dr. Menso Folkerts, Institut für Geschichte der Naturwissenschaften der Universität München, für die Unterstützung bei der Durchsicht des von ihm verwalteten Seidel-Nachlasses und für die Erlaubnis, aus der in diesem Nachlaß befindlichen Vorlesungsmitschrift [Dirichlet 1846] eine längere Passage wiederzugeben (Anhang A).

Ferner danke ich dem zentralen Archiv der Akademie der Wissenschaften zu Berlin für die Überlassung von Kopien aus unveröffentlichtem Nachlaßmaterial (Bessel, Dirichlet) und dem Verlag Gauthier-Villars/Elsevier Paris, 23, rue Linois, 75724 Paris cedex 15 für die Erlaubnis zur Veröffentlichung einiger umfangreicher Passagen aus dem Zeitschriftenartikel [Lévy 1935b] in deutscher Übersetzung.

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	1
0.1	Verschiedene Versionen zentraler Grenzwertsätze	2
0.2	Zielsetzungen und Schwerpunkte der vorliegenden Untersuchung	3
0.3	Zur Entwicklung der Analysis im 19. Jahrhundert	5
0.4	Zur vorhandenen Sekundärliteratur	6
0.5	Einzelergebnisse	8
0.6	Zu Terminologie und Schreibweisen	9
0.7	Die Vorgeschichte: der Satz von de Moivre	10
1	Die Wegweisung durch Laplace	13
1.1	Laplaces Weg zum zentralen Grenzwertsatz	14
1.1.1	Summen von Zufallsgrößen	14
1.1.2	Die Laplacesche Approximationsmethode	17
1.1.2.1	De Moivre, Stirling und Euler zu Approximationen an $s!$	17
1.1.2.2	Die Genese der Laplaceschen Approximationsmethode	19
1.1.3	Die asymptotische Lösung des Neigungswinkelproblems	23
1.1.3.1	Laplaces Modifikation erzeugender Funktionen bei Summen von Zufallsgrößen	23
1.1.3.2	Laplaces Approximation bei gleichverteilten Zufallsgrößen	25
1.1.4	Der zentrale Grenzwertsatz: ein Ergebnis mit zeitlicher Verspätung?	28
1.2	Summen und Linearkombinationen unabhängiger Beobachtungsfehler	29
1.3	Die Anwendungen des zentralen Grenzwertsatzes bei Laplace	33
1.3.1	Fehlertheorie	34
1.3.1.1	Lineare Gleichungssysteme und Methode der kleinsten Quadrate	35
1.3.1.2	Laplaces Begründung der Methode der kleinsten Quadrate	38
1.3.2	Das schwache Gesetz der großen Zahlen	41
1.3.3	Regelmäßige Ursachen in der Natur	44
1.4	Laplace und der Satz von de Moivre	45
1.4.1	Laplaces Beweis	46
1.4.2	Das weitere Schicksal des Satzes von de Moivre	47
2	Die Weiterentwicklung der Laplaceschen Herleitung und Anwendung des zentralen Grenzwertsatzes im 19. Jahrhundert	49
2.1	Poissons Beiträge	50
2.1.1	Poissons Darstellung der Wahrscheinlichkeit einer Summe	52
2.1.2	Der infinitesimalanalytische Ansatz	53
2.1.3	Poissons Gegenbeispiele	55
2.1.4	Approximation durch Reihenentwicklungen	56
2.1.5	Poissons „Gesetz der großen Zahlen“	57
2.1.5.1	Poissons Ursachensystem	58
2.1.5.2	Die Weiterentwicklung des Gesetzes der großen Zahlen im 19. Jahrhundert	61
2.2	Diskussion der Laplaceschen Begründung der Methode der kleinsten Quadrate im Anschluß an Poisson	63
2.2.1	Haubers und Ellis' Begründung der Methode der kleinsten Quadrate	63
2.2.2	Bienaymés Begründung der Methode der kleinsten Quadrate	65
2.3	Die Weiterentwicklung der Laplaceschen Approximationsmethode	67
2.3.1	Dirichlets Beweis des zentralen Grenzwertsatzes	67
2.3.2	Funktionen großer Zahlen bei Cauchy	73

2.4	Die Cauchy-Bienaymé-Kontroverse	76
2.4.1	Der Beginn der Kontroverse	77
2.4.2	Cauchy über die Grundlagen der Methode der kleinsten Quadrate	81
2.4.2.1	Die Methode der „fonction auxiliaire“	81
2.4.2.2	Die Methode der kleinsten Quadrate als eine unter vielen	85
2.4.2.3	Die Methode der kleinsten Quadrate bei einer „sehr großen Anzahl von Beobachtungen“	88
2.4.3	Bienaymés Verteidigung der Laplaceschen Fehlertheorie	90
2.4.4	Cauchy und der zentrale Grenzwertsatz	92
2.4.4.1	Was hat Cauchy bewiesen?	93
2.4.4.2	Cauchys Beweisidee	94
2.4.5	Die Methode der kleinsten Quadrate — ein ungeeignetes Objekt für mathematischen Rigorismus	96
3	Die Elementarfehlerhypothese	99
3.1	Die Gaußsche Begründung der Methode der kleinsten Quadrate	99
3.2	Hagen, Bessel und die „elementären Fehler“	102
3.2.1	Die Wiederentdeckung der Elementarfehlerhypothese durch Gotthilf Hagen	102
3.2.2	Bessels Verallgemeinerung der Elementarfehlerhypothese	106
3.3	Die Rezeption der Hagen-Besselschen Elementarfehlerhypothese	110
3.3.1	Die Bedeutung der Elementarfehlerhypothese für Normalverteilungen in Bio- und Sozialstatistik	110
3.3.2	Ausbau der Elementarfehlerhypothese in der Fehlertheorie	111
3.3.2.1	Rechtecksverteilte Elementarfehler	111
3.3.2.2	Croftons Elementarfehlerhypothese	112
3.3.2.3	Pizzettis Darstellung der Elementarfehlerhypothese	114
3.3.2.4	Schols und die Elementarfehler in der Ebene und im Raum	116
3.4	Modifikationen der Elementarfehlerhypothese zur Begründung nichtnormaler Verteilungen	118
3.4.1	Reihenentwicklungen	119
3.4.1.1	Chebyshev, Gram, Thiele, Bruns	119
3.4.1.2	Die Charlier-Reihen	125
3.4.2	Edgeworth und „das“ Fehlergesetz	128
3.4.3	Die Translationsmethode	135
3.4.3.1	Die Lognormalverteilung	135
3.4.3.2	Wicksells allgemeines Elementarfehlermodell	136
3.4.3.3	Das weitere Schicksal der Elementarfehlerhypothese	137
4	Chebyshevs und Markovs Beiträge	139
4.1	Das Chebyshevsche Momentenproblem	140
4.2	Quadraturformeln, Kettenbrüche, orthogonale Polynome, Momente	146
4.2.1	Das Gaußsche Quadraturverfahren	146
4.2.2	Verallgemeinerungen der Gaußschen Quadraturformel, Systeme orthogonaler Polynome	149
4.2.3	Chebyshevs Beiträge	151
4.3	Markovs und Stieltjes' Beschäftigung mit Momentenproblemen um 1884	154
4.3.1	Markovs frühe Arbeiten zur Momententheorie	154
4.3.2	Stieltjes' frühe momententheoretische Arbeiten	156
4.4	Weitere momententheoretische Arbeiten Chebyshevs	158
4.5	Das Stieltjessche Momentenproblem	162
4.6	Momententheorie und zentraler Grenzwertsatz	163
4.6.1	Chebyshevs wahrscheinlichkeitstheoretisches Werk	163
4.6.2	Chebyshevs „mißglückter“ Beweis von 1887	163
4.6.3	Poincaré: Momente und Elementarfehlerhypothese	165
4.6.4	Markovs strenger Beweis	167
4.7	Chebyshevs und Markovs Beweise des zentralen Grenzwertsatzes: Beginn einer „neuen“ Wahrscheinlichkeitsrechnung?	172
4.7.1	Die Stellung des zentralen Grenzwertsatzes bei Chebyshev	172
4.7.2	Die Stellung des zentralen Grenzwertsatzes in Markovs ersten Arbeiten	173
4.7.3	Der zentrale Grenzwertsatz als Anhängsel an die Momententheorie	174

5	Der Weg in die Moderne	177
5.1	Russische Beiträge zwischen Jahrhundertwende und 1. Weltkrieg	178
5.1.1	Lyapunovs Weg zum zentralen Grenzwertsatz	179
5.1.2	Nekrasovs Bedeutung für die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung um 1900	179
5.1.3	Lyapunov-Bedingung und Lyapunov-Ungleichung	181
5.1.4	Skizze von Lyapunovs Beweis für den zentralen Grenzwertsatz	184
5.1.5	Markovs Reaktion	186
5.2	Der zentrale Grenzwertsatz in den zwanziger Jahren	188
5.2.1	Eine neue Generation	188
5.2.2	Von Mises: Laplacesche Approximationsmethode, komplexe und reelle Adjunkte	190
5.2.3	Pólya und Lévy: Fehlergesetze, charakteristische Funktionen und Momente	194
5.2.3.1	Pólyas erste Beiträge	194
5.2.3.2	Die Elementarfehlerhypothese als Motivation für Lévy's erste Arbeiten	195
5.2.3.3	Das Vorbild Poincaré	196
5.2.3.4	Lévy's Fundamentalsätze über charakteristische Funktionen	197
5.2.3.5	Pólyas Reaktion auf Lévy's erste Arbeiten	200
5.2.4	Lindeberg: Eine völlig neue Methode	202
5.2.4.1	Der Beweis	203
5.2.4.2	Verschiedene Sätze, verschiedene Bedingungen	205
5.2.5	Die Diskussion stabiler Wahrscheinlichkeitsgesetze in Lévy's „Calcul des probabilités“	206
5.2.5.1	Stabile Gesetze als Grenzesetze	206
5.2.5.2	Die Funktionalgleichung für die charakteristische Funktion eines stabilen Gesetzes	207
5.2.5.3	Die Gesetze vom Typ $L_{\alpha,\beta}$	208
5.2.5.4	Eine Verallgemeinerung des zentralen Grenzwertsatzes	210
5.2.5.5	Der „klassische“ zentrale Grenzwertsatz als Spezialfall	210
5.2.5.6	Weitere Grenzesetze	212
5.2.5.7	Anziehungsbereiche stabiler Verteilungen	212
5.2.6	Bernshtein und sein „lemme fondamental“	214
5.2.6.1	Die Aussage	214
5.2.6.2	Beweisskizze	216
5.2.7	Cramér: Verbesserung der Lyapunov-Schranke und asymptotisches Verhalten von „Exponentialreihen“	218
5.2.7.1	Risikothorie als Ausgangspunkt	218
5.2.7.2	Cramér's Untersuchungen zur Asymptotik von Edgeworth- und Charlier-Entwicklungen	219
5.3	Vom Grenzwertsatz zum Grenzwertproblem	225
5.3.1	Zur Vorgeschichte	225
5.3.1.1	Lévy und das Problem nicht vernachlässigbarer Summanden	226
5.3.1.2	Feller und der Fall, der „überhaupt nicht zur Wahrscheinlichkeitsrechnung gehört“	227
5.3.2	Lévy's und Feller's Ergebnisse und Methoden	228
5.3.2.1	Lévy's Hauptsätze	228
5.3.2.2	Lévy's „intuitive“ Methoden	229
5.3.2.3	Lévy's Beweise	230
5.3.2.4	Feller's Hauptsätze	245
5.3.2.5	Feller's Beweise	246
5.3.3	Eine Frage der Priorität?	251
5.3.3.1	Lévy und Feller: eine Gegenüberstellung	252
5.3.3.2	Noch ein Prioritätsproblem	253
5.3.3.3	Eine Frage des Stils	255
5.4	Weitere Grenzwertprobleme	255
5.4.1	Stochastische Prozesse mit unabhängigen Zuwächsen	256
5.4.2	Grenzverteilungen normierter Summen unabhängiger Zufallsgrößen	257
6	Zusammenfassung	
	Der zentrale Grenzwertsatz als Bindeglied zwischen klassischer und moderner Wahrscheinlichkeitsrechnung	261

Anhang	273
A Wortlaut von Dirichlets Beweis des zentralen Grenzwertsatzes nach einer Vorlesungsmitschrift von 1846	273
B Charlier-A-Reihen	277
C Die Lévy-Zerlegung einer Zufallsgröße	279
Literatur	281
Namenverzeichnis	301
Wichtige Bezeichnungen, Sachverzeichnis	305