

OFDM for Wireless Communications: Nyquist Windowing, Peak–Power Reduction, and Synchronization

OFDM für die Funkkommunikation: Nyquist–Fensterung,
Spitzenleistungsreduktion und Synchronisierung

Der Technischen Fakultät
der Universität Erlangen–Nürnberg

zur Erlangung des Grades

Doktor–Ingenieur

vorgelegt von

Stefan H. Müller–Weinfurtner

Erlangen – 2000

Als Dissertation genehmigt von
der Technischen Fakultät der
Universität Erlangen–Nürnberg

Tag der Einreichung:	7. April 2000
Tag der Promotion:	16. Juni 2000
Dekan:	Prof. Dr. H. Meerkamm
Berichterstatter:	Prof. Dr. J. Huber
	Prof. Dr. H. Rohling

Berichte aus der Kommunikations- und Informationstechnik

Band 16

Stefan Müller-Weinfurtner

OFDM for Wireless Communications:

Nyquist Windowing, Peak-Power Reduction,
and Synchronization

D 29 (Diss. Universität Erlangen-Nürnberg)

Shaker Verlag
Aachen 2000

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Müller-Weinfurter, Stefan:

OFDM for Wireless Communications: Nyquist Windowing,
Peak-Power Reduction, and Synchronization /

Stefan Müller-Weinfurter.

Aachen : Shaker, 2000

(Berichte aus der Kommunikations- und Informationstechnik ; Bd. 16)

Zugl.: Erlangen-Nürnberg, Univ., Diss., 2000

ISBN 3-8265-7658-6

Copyright Shaker Verlag 2000

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the prior permission of the publishers.

Printed in Germany.

ISBN 3-8265-7658-6

ISSN 1432-489X

Shaker Verlag GmbH • P.O. BOX 1290 • D-52013 Aachen

Phone: 0049/2407/9596-0 • Telefax: 0049/2407/9596-9

Internet: www.shaker.de • eMail: info@shaker.de

Danksagung

Ich bedanke mich bei meinem Betreuer Prof. Johannes Huber für das sehr gute Arbeitsklima und viele fruchtbare Diskussionen sowie bei Prof. Hermann Rohling für die freundliche Bereitschaft zur Übernahme des Koreferats. Sehr viel zu verdanken habe ich auch meinem akademischen Lehrer Prof. H.W. Schüßler.

Die sehr hilfreichen Anregungen von Dr. Robert Fischer verbesserten die Lesbarkeit der vorliegenden Arbeit spürbar. Weiterer Dank gebührt meinen Arbeitskollegen Marco Breiling, Dr. Wolfgang Gerstacker, Alexander Lampe, Lutz Lampe, Dr. Ralf Müller, Jürgen Rößler, Robert Schober sowie allen jetzigen und früheren Kollegen am Laboratorium für Nachrichtentechnik in Erlangen. Bedanken möchte ich mich auch bei Frau Susi Koschny für die gewissenhafte Erstellung vieler Graphiken.

Besonderen Dank möchte ich an die Firma Ericsson für die langjährige Finanzierung meiner Forschungsarbeiten richten. Tack så mycket! Den Mitarbeitern von Ericsson Eurolab GmbH in Nürnberg — Dr. Jamshid Khun-Jush, Dr. Wolfgang Koch, Dr. Peter Schramm, Dr. Jörn Thielecke und Dr. Udo Wachsmann — bin ich für viele Diskussionen und Anregungen dankbar.

Keinesfalls möchte ich zu dieser Gelegenheit versäumen, meiner Frau Ursula sowie meinem Vater und meinen Brüdern für die fortwährende Unterstützung zu danken.

Last but not least I cordially thank each single interested reader, and I hope that I succeeded to write a useful thesis. For in-depth questions and comments you are invited to contact *smw@uwsmw.de*.

Abstract

Chapter 2 gives a short overview of multicarrier modulation history and the available literature. The most important parameters in the German research project “ATMmobil” are provided, in which a communications system with a data rate of 10 to 20 Mbit/s is designed. This thesis summarizes system proposals which came into being according to a subcontract within this research initiative.

Chapter 3 reviews the working principle of Orthogonal Frequency-Division Multiplexing (OFDM). A general OFDM transceiver concept is analyzed, and these results are finally specialized to conventional OFDM. The loss of mutual subcarrier orthogonality is quantified in analytical expressions and normalized graphs, and minimum requirements for synchronization accuracy are obtained. Further, the modulation and coding scheme is described, and the channel models used in the simulations are introduced.

Conventional OFDM receivers — with rectangular windowing in time — disregard the guard interval even in situations with small channel dispersion. The signal samples received during the unconsumed portion of the guard interval can be exploited to enable improved and more robust demodulation. An (adaptive) Nyquist-shaped receiver window can be applied to preserve subcarrier orthogonality. In Chapter 4, the window shape is optimized according to the minimum mean-squared error (MMSE) criterion by jointly considering additive noise and intercarrier interference due to carrier frequency offsets. Most often, this optimum shape will be found to be approximately linear in the rolloff region so that in a second derivation the optimum slope of an a-priori linear rolloff shape is determined. The modified OFDM receiver exhibits an increased robustness towards frequency offsets and a moderate signal combining gain.

Chapter 5 is dedicated to one of the most problematic issues in the practical use of OFDM; concepts for an effective reduction of peak power are investigated and the behaviour of the discrete-time and the continuous-time OFDM transmit signal are studied. The statistical properties of the discrete-time crest factor of OFDM are analyzed, and a theoretical limit for the trade-off between required redundancy and minimum achievable crest factor is derived. After a brief summary of the state-of-the-art techniques known in the literature, two distortionless, flexible, and highly effective peak-power reduction schemes for OFDM are proposed, which employ a small amount of additional complexity and almost vanishing redundancy. The schemes are called selected mapping (SLM) and partial transmit sequences (PTS). Both concepts work with multiple signal representation and — in the general concept — additional side information,

indicating which of the alternative signals has actually been transmitted. These techniques could also be used in single-carrier modulation or with other multiplex schemes, which lies beyond the scope of this thesis; here, we focus on OFDM. An interesting novel variant of SLM is introduced, which does not require transmission of explicit side information. The PTS approach is optimized in performance by introduction of pseudo-random partitioning of subcarriers into subblocks. An interleaved subblock partitioning in PTS turns out to be implementationally advantageous. Finally, an oversampled processing in the transmitter for crest-factor reduction is proposed to mitigate the mismatch between discrete-time predictions and actual continuous-time signal behaviour. The improved peak-power statistics of the new OFDM schemes are covered by simulations, and the effect on out-of-band spectral content due to nonlinearities is studied.

Finally, Chapter 6 is devoted to frame and frequency synchronization in OFDM. Two competitive structures for a repetition preamble — to enable coarse frame and frequency synchronization — are introduced, analyzed, and compared to each other. Optimum metrics for detection of repetition preambles with extended guard interval are derived, which allow a significant improvement in synchronization performance. Several strategies to enlarge the frequency estimation range are discussed and analyzed. A novel technique which first estimates a fine offset and subsequently resolves frequency ambiguity by use of further correlation terms is shown to be advantageous for the parameter settings of ATMmobil.

Often, the initial frame offset estimate is too inaccurate for high-level modulation schemes, making an additional (iterative) frequency-domain frame synchronization necessary, which can significantly improve the initial estimate. A suitable approach is described and the estimator properties are analyzed. The frame position found by this estimator allows improved differential demodulation in frequency direction and hence enables a significant gain.

Appendix A provides general mathematical derivations, while Appendix B collects extensions and in-depth analyses of the synchronization algorithms. It contains a general study of (maximum-likelihood) phase increment estimators and gives a deep insight into their properties. The achievable estimation variance with respect to the Cramér–Rao lower bound is outlined. Generally applicable results are derived for the estimation variance of the phase obtained from unweighted correlation results. These results are used for calculation of estimation variances throughout this thesis.

Further, the fundamental lock-in probability distribution for coarse frame synchronization is derived, which results from exploiting the signal repetition structure. Finally, techniques for lock-in range extension of frequency estimators are analyzed to obtain theoretical probabilities for phase-ambiguity errors. A large portion of the theoretical contributions of this thesis is located in Appendix B, while proposals to system design can be found in the main section.

Zusammenfassung

Kapitel 2 bietet einen kurzen Überblick über Geschichte und die verfügbare Literatur über Mehrträger-Modulation. Die wichtigsten Parameter des deutschen Forschungsprojekts ATMmobil werden wiedergegeben, in welchem ein Kommunikationssystem mit hoher Datenrate entworfen wird. Diese Doktorarbeit stellt Systemvorschläge zusammen, welche innerhalb eines Unterauftrags in dieser Forschungsinitiative entstanden sind.

Kapitel 3 wiederholt die Arbeitsweise des orthogonalen Frequenzmultiplexes (OFDM). Ein allgemeines OFDM-Konzept wird analysiert und die gewonnenen Ergebnisse werden schließlich auf herkömmliches OFDM spezialisiert. Der Verlust der wechselseitigen Unterträger-Orthogonalität wird mittels analytischer Ausdrücke und normierter Grafiken quantifiziert und daraus werden Minimalanforderungen für die Synchronisationsgenauigkeit gewonnen.

Herkömmliche OFDM-Empfänger — mit einer rechteckigen Zeitbereichsfensterung — vernachlässigen das Schutzintervall sogar in Situationen mit kleiner Kanaldispersion. Die Signalabstastwerte, welche während des unverbrauchten Teils des Schutzintervalls empfangen werden, können ausgenutzt werden, um eine verbesserte und robustere Demodulation zu ermöglichen. Ein (adaptives) Nyquist-förmiges Empfangsfenster kann verwendet werden, um die Orthogonalität der Unterträger beizubehalten. In Kapitel 4 wird der Verlauf des Fensters gemäß des Kriteriums des minimalen mittleren Fehlerquadrats (MMSE) optimiert, indem der additive Rauscheinfluss sowie die Interferenz zwischen den Unterträgern gemeinsam betrachtet werden. Häufig ist der optimierte Verlauf nahezu linear innerhalb des Übergangsbereichs, so dass in einer zweiten Herleitung die optimale Steigung eines von vornherein linearen Verlaufs im Übergangsbereich bestimmt wird. Der modifizierte OFDM-Empfänger zeigt eine größere Robustheit gegenüber Frequenzfehlern und einen moderaten Gewinn durch Kombination von Signalanteilen.

Kapitel 5 ist einem der wichtigsten Probleme in der praktischen Anwendung von OFDM gewidmet; Konzepte für eine effektive Reduzierung der Spitzenleistung werden untersucht, und das Verhalten des zeitdiskreten sowie des zeitkontinuierlichen OFDM-Sendesignals werden studiert. Die statistischen Eigenschaften des Crest-Faktors im zeitdiskreten Bereich werden analysiert, und eine theoretische Schranke für den Austausch zwischen einzubringender Redundanz und dem damit zu erzielenden minimalen Crest-Faktor wird hergeleitet. Nach einer kleinen Zusammenstellung der in der Literatur bekannten Lösungsansätze werden zwei verzerrungsfreie, flexible und höchst effiziente Spitzenleistungsreduktionsverfahren für OFDM vorgestellt, welche ein wenig zusätzliche Komplexität erfordern und nahezu verschwindend wenig Redundanz einführen. Die Verfahren heißen selected mapping (SLM) und partial transmit sequences (PTS). Beide Konzepte verwenden eine mehrfache Signalrepräsentation und — im

allgemeinen Konzept — zusätzliche Seiteninformation, die andeutet, welches der alternativen Signale tatsächlich übertragen wurde. Diese Vorgehensweise kann genauso bei Einträgermodulation oder anderen Multiplexverfahren eingesetzt werden, was jedoch nicht Gegenstand dieser Arbeit ist; hier soll das Hauptaugenmerk auf OFDM liegen. Eine interessante neue Variante von SLM wird eingeführt, welche keinerlei Übertragung von expliziter Seiteninformation benötigt. Der Ansatz mit PTS wird hinsichtlich seiner Leistungsfähigkeit optimiert, indem eine pseudozufällige Aufteilung der Unterträger auf Unterblöcke eingeführt wird. In PTS stellt sich eine verzahnte Unterblockaufteilung als vorteilhaft für die Implementierung heraus. Schließlich wird eine überabgetastete Verarbeitung im Sender vorgeschlagen, um die Unstimmigkeiten zwischen den zeitdiskreten Vorhersagen und dem tatsächlichen zeitkontinuierlichen Signalverhalten zu verringern. Das verbesserte statistische Verhalten der Spitzenleistung wird durch Simulationsergebnisse belegt, und der Einfluß auf die durch Nichtlinearitäten hervorgerufene Außenbandleistung wird untersucht.

Kapitel 6 ist schließlich der Rahmen- und Frequenzsynchronisation verschrieben. Zwei konkurrierende Wiederholungspräambelstrukturen — für grobe Rahmen- sowie Frequenzsynchronisation — werden eingeführt, analysiert und miteinander verglichen. Optimale Metriken zur Detektion von Wiederholungspräambeln mit erweitertem Schutzintervall werden hergeleitet, welche die Leistungsfähigkeit der Synchronisation erheblich verbessern. Mehrere Strategien zur Vergrößerung des Frequenzschätzbereichs werden diskutiert und analysiert. Für die im ATMmobil-Projekt vorliegenden Parameter weist sich eine neue Vorgehensweise als vorteilhaft aus, welche zuerst einen feinen Frequenzfehler schätzt und danach Mehrdeutigkeiten durch Benutzung weiterer Korrelationsterme auflöst.

Oft ist der anfängliche Schätzwert für den Rahmenversatz zu ungenau für hochstufige Modulationsverfahren, so dass eine zusätzliche (iterative) Rahmensynchronisation aus dem Frequenzbereich heraus notwendig wird, welche den anfänglichen Schätzwert deutlich verbessern kann. Ein geeigneter Ansatz wird beschrieben, und die Eigenschaften des Schätzers werden analysiert. Die Rahmenposition, welche von diesem Schätzer gefunden wird, erlaubt eine verbesserte differenzielle Demodulation in Frequenzrichtung und ermöglicht somit einen deutlichen Gewinn.

Anhang A stellt allgemeine mathematische Herleitungen zur Verfügung, wohingegen Anhang B die Erweiterungen sowie eine gründliche Analyse der Synchronisationsalgorithmen vereint. Dieser beinhaltet eine allgemeine Studie über (Maximum-Likelihood) Phasenzwachs-schätzer und bietet einen tiefen Einblick in deren Eigenschaften. Die erreichbare Schätzvarianz in Bezug auf die untere Schranke nach Cramér-Rao wird grob dargelegt. Allgemein verwendbare Ergebnisse für die Schätzvarianz der Phase aus ungewichteten Korrelationsergebnissen werden hergeleitet. Diese Ergebnisse werden in der ganzen Arbeit zur Berechnung von Schätzvarianzen benutzt. Ferner wird die grundlegende Verteilung der Einrastwahrscheinlichkeit hergeleitet, welche sich für die grobe Rahmensynchronisation durch Ausnutzung der Signalwiederholungsstruktur ergibt. Schließlich werden Methoden zur Schätzbereichserweiterung von Frequenzschätzern untersucht, um theoretische Wahrscheinlichkeiten für Fehler durch Phasenmehrdeutigkeiten zu erhalten. Ein großer Anteil der theoretischen Beiträge dieser Arbeit befindet sich in Anhang B, wohingegen sich die Vorschläge zum Systementwurf im Hauptteil befinden.

Contents

Abstract	i
Acronyms	xv
Important Variables, Constants, and Sets	xvii
Transforms, Functions, and Operators	xxi
1 Introduction	1
2 Background	3
2.1 Orthogonal Frequency–Division Multiplexing	3
2.1.1 History of OFDM	3
2.1.2 Advantages of OFDM	4
2.1.3 Difficulties in Data Transmission with OFDM	5
2.1.4 Practical Application of OFDM Techniques	6
2.2 Technical Data of the “ATMmobil” Project	6
3 Analysis of Orthogonal Frequency–Division Multiplexing	9
3.1 Analysis of a General OFDM Scheme	9
3.1.1 A General OFDM Transmitter	10
3.1.2 A General OFDM Receiver	13
3.1.3 Transmission Characteristics of the General OFDM Scheme	15
3.1.3.1 General Receiver and Transmitter Windows	15
3.1.3.2 Negligible Intersymbol Interference	16
3.1.3.3 Transfer Function and Transfer Factor of Overall Channel	17
3.1.3.4 Sufficiently Long Constant Transmit Window Portion	18
3.2 Special Case: Conventional OFDM	20
3.2.1 Conventional OFDM Transmission	20
3.2.2 The Subcarrier Transfer Factor (STF)	22
3.2.3 Loss of Orthogonality in Conventional OFDM	23
3.2.3.1 Carrier Frequency Offset	23
3.2.3.2 Sampling Frequency Offset	25

3.2.3.3	Insufficient Guard Interval	27
3.3	Transmission over Imperfect Channels	27
3.3.1	Additive White Gaussian Noise Channel	27
3.3.2	Channel Coding	27
3.3.3	Dispersive Channel	28
3.3.3.1	Channel Transfer Factor	28
3.3.3.2	Channel Correlation Parameter	28
3.3.3.3	Assumed Channel Power Delay Profile	29
3.4	Drawbacks of Conventional OFDM and Scope of this Thesis	30
4	Nyquist Windowing in OFDM Receivers	31
4.1	Dualities and Imperfections	31
4.2	Receiver Windows with Time Excess	31
4.3	OFDM Transmission Characteristics	33
4.4	MMSE–Optimum Nyquist Receiver Window Shape	34
4.4.1	Decomposition of Receiver Nyquist Window	34
4.4.2	Subcarrier Transfer Factor	35
4.4.3	Definitions	35
4.4.4	MMSE–Optimization of Window Shape	36
4.4.5	Asymptotic Optimum Window Shapes	39
4.4.5.1	Dominating ICI	39
4.4.5.2	Dominating Noise	39
4.4.6	Numerical Results for MMSE–Optimum Window	39
4.5	Extensions and Implementational Issues	40
4.5.1	Adaptive Time–Excess Factor	40
4.5.2	Application in OFDM Systems without Postfix	41
4.5.3	Time Excess into Consumed Guard Interval	41
4.6	Near–Optimum Nyquist Window Shape	41
4.6.1	Nyquist Window with Linear Rolloff Region	42
4.6.2	Subcarrier Transfer Factor	42
4.6.3	Optimum Slope in Rolloff Region	43
4.6.4	Asymptotic Optimum Results	44
4.6.4.1	Dominating ICI	44
4.6.4.2	Dominating Noise	44
4.6.5	Calculating the Subcarrier SNR	44
4.6.6	Numerical Results for MMSE–Optimum Slope	44
4.7	Performance Comparison with other Window Types	46
4.7.1	Improvement in Effective Subcarrier SNR	46
4.7.2	Spectral Characteristics	47
4.7.3	Simulation Results for Error Performance	48
4.8	Summary and Conclusions	50

5 Crest-Factor Reduction in OFDM	51
5.1 The Crest-Factor Problem in OFDM	51
5.1.1 Drawbacks of the High Crest Factor	51
5.1.2 Analysis of Crest-Factor Statistics	52
5.1.3 Ideal Crest-Factor-Limitation-Coding Bound	55
5.2 State of the Art in Crest-Factor Reduction	57
5.2.1 Hard Clipping in Baseband	57
5.2.2 Multiplicative Signal Distortion	58
5.2.3 Additive Bandlimited Signal Distortion	58
5.2.4 Combined (Block) Coding and OFDM Modulation	59
5.2.5 Iterative Optimization Algorithms	59
5.2.6 Signal Constellation Expansion	60
5.2.7 Requirements for Ideal Methods	60
5.3 CF Reduction with Selected Mapping (SLM)	61
5.3.1 SLM Transmitter	61
5.3.2 SLM Receiver	62
5.3.3 SLM Transceivers without Explicit Side Information	63
5.4 Partial Transmit Sequences (PTS) for CF Reduction	65
5.4.1 PTS Transmitter	65
5.4.2 PTS Receiver	67
5.4.3 Some Implementation and Efficiency Aspects	68
5.4.4 A Favourable Variant of PTS	69
5.4.5 Autocorrelation Function of Partial Transmit Sequences	70
5.4.6 Simulation Results for CF Reduction with PTS	75
5.4.7 An Implementationally Advantageous Variant of PTS	82
5.4.8 Impact of PTS on Current Literature	87
5.5 A Comparison of PTS and SLM	88
5.6 Properties of the Continuous-Time OFDM Signal	92
5.6.1 Continuous-Time vs. Discrete-Time	92
5.6.2 Oversampled ECB Processing for CF Reduction	95
5.6.3 Simulation Results with Oversampled ECB Processing	95
5.6.4 Phasor Diagrams of Oversampled PTS-OFDM Signals	100
5.7 Impairments in Presence of Nonlinearities	102
5.7.1 Nonlinear Transmission Models	102
5.7.2 Out-of-Band Power Density of Conventional OFDM	103
5.7.3 Out-of-Band Power Density of PTS-OFDM	104
5.7.4 Applicability of PTS and SLM in other Modulation Schemes	105
6 Frame and Carrier Frequency Synchronization for Bursty OFDM	107
6.1 Introduction	107
6.2 Burst Synchronization Exploiting Signal Repetition	108

6.2.1	State-of-the-Art Techniques	108
6.2.2	Possibilities to Inject Signal Periodicity	109
6.2.3	Requirements for Burst Sync with Repetition Structures	110
6.2.4	The Sandamble Structure	110
6.2.5	The Conventional Preamble Structure	111
6.2.6	Properties of the Received Signal	112
6.2.7	Sandamble vs. Preamble	113
6.3	Coarse Frame Synchronization using Preamble	114
6.3.1	Synchronization Quantities	114
6.3.2	Minimum-Mean-Squared-Error (MMSE) Metric	114
6.3.3	Maximum-Likelihood (ML) Metric	115
6.3.4	Maximum-Correlation (MC) Metric	116
6.3.5	Schmidl-Cox Metric	116
6.3.6	Maximum Normalized Correlation (MNC) Metric	116
6.3.7	Estimating the Signal-to-Noise Power Ratio	117
6.3.8	Simulation Results for Continuous Transmission	118
6.3.9	Insensitivity of MNC in Non-Continuous Transmission	121
6.4	Carrier Frequency Synchronization	123
6.4.1	Frequency Estimation Variance	123
6.4.2	Required Carrier Frequency Estimation Accuracy	124
6.4.3	Effect of Non-Ideal Frame Synchronization	124
6.4.4	Simulation Results for Sandamble	126
6.5	Optimum (Frame) Synchronization using Sandamble	127
6.5.1	Derivation of the Optimum Synchronization Metric	127
6.5.2	Relation to Metric using Conventional Repetition Preamble	132
6.5.3	Metrics for General Multiple-Repetition Preambles	132
6.5.4	Simulation Results for Continuous Transmission	132
6.6	Frequency Estimation-Range Extension	135
6.6.1	Additional Correlations	135
6.6.2	Coarse/Fine (CF) Approach	136
6.6.2.1	Frequency Estimation Algorithm	136
6.6.2.2	Frequency Estimation Failure Rate	137
6.6.3	Fine/Discrete (FD) Approach	137
6.6.3.1	Frequency Estimation Algorithm	137
6.6.3.2	Using A-Priori Probabilities for the Interval Detection in FD	138
6.6.3.3	Frequency Estimation Failure Rate	139
6.6.3.4	Improving the Frequency Estimation Failure Rate	139
6.6.4	Power Efficiency of Frequency Estimation Algorithms	140
6.6.4.1	Theoretical Results for Frequency Failure Rate	140
6.6.4.2	Simulation Results with Perfect Frame Synchronization	142

6.7	Frequency-Domain Frame Synchronization	144
6.7.1	The Frame Synchronization Algorithm	144
6.7.2	Lower Bound for Frame Synchronization Variance	147
6.7.3	Simulation Results	147
6.7.4	Improved Differential Demodulation in Frequency Direction	149
7	Conclusions	151
A	Mathematical Appendix	153
A.1	Differentiation with Respect to a Vector	153
A.2	Some Finite Sum Expressions	153
A.3	Probability Density Function of Phase Angle	154
A.4	Error Probability Computation	158
B	Synchronization Appendix	159
B.1	Parameter Estimation Exploiting Signal Structure	159
B.1.1	Estimation of a Scalar Multiplicative Factor	159
B.1.2	Phase (Increment) Estimation	161
B.1.2.1	Phase Estimate from a Single Observation Block	161
B.1.2.2	Cramér-Rao Lower Bound for the Phase-Estimation Problem	166
B.1.3	Phase Estimation using Multiple Observation Blocks	168
B.1.4	Some Useful Equations	169
B.2	Derivation of Frame Lock-In Probab. Distribution	171
B.3	Lock-In Range Issues in Frequency Estimation	177
B.3.1	Lock-In Range Extension with Two Correlation Results	177
B.3.1.1	Coarse/Fine Approach	178
B.3.1.2	Maximum-Likelihood Approach	179
B.3.1.3	Fine/Discrete Approach	180
B.3.2	Lock-In Failure Probabilities	182
B.3.2.1	Single Correlation Frequency Estimation	182
B.3.2.2	Coarse/Fine Estimation	183
B.3.2.3	Fine/Discrete Estimation	184
	Bibliography	187
	Index	201

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	iii
Abkürzungen	xv
Wichtige Formelzeichen, Konstanten und Mengen	xvii
Transformationen, Funktionen und Operatoren	xxi
1 Einführung	2
2 Hintergrund	3
2.1 Orthogonaler Frequenzmultiplex	3
2.1.1 Geschichte von OFDM	3
2.1.2 Vorteile von OFDM	4
2.1.3 Schwierigkeiten bei der Datenübertragung mittels OFDM	5
2.1.4 Praktische Anwendung von OFDM-Verfahren	6
2.2 Technische Daten des ATMmobil-Projekts	6
3 Analyse des orthogonalen Frequenzmultiplexes	9
3.1 Analyse eines allgemeinen OFDM-Verfahrens	9
3.1.1 Ein allgemeiner OFDM-Sender	10
3.1.2 Ein allgemeiner OFDM-Empfänger	13
3.1.3 Übertragungseigenschaften des allgemeinen OFDM-Verfahrens	15
3.1.3.1 Allgemeine Empfangs- und Sendefenster	15
3.1.3.2 Vernachlässigbare Nachbarsymbolbeeinflussung	16
3.1.3.3 Übertragungsfunktion und Übertragungsfaktor des Gesamtkanals	17
3.1.3.4 Ausreichend langer konstanter Anteil des Sendefensters	18
3.2 Spezialfall: Herkömmliches OFDM	20
3.2.1 Herkömmliche OFDM-Übertragung	20
3.2.2 Der Unterträger Übertragungsfaktor	22
3.2.3 Verlust der Orthogonalität in herkömmlichem OFDM	23
3.2.3.1 Trägerfrequenzabweichung	23
3.2.3.2 Abtastfrequenzabweichung	25

3.2.3.3	Unzureichendes Schutzintervall	27
3.3	Übertragung über nichtperfekte Kanäle	27
3.3.1	Der additive weiße Gauß'sche Rauschkanal	27
3.3.2	Kanalcodierung	27
3.3.3	Dispersiver Kanal	28
3.3.3.1	Kanalübertragungsfaktor	28
3.3.3.2	Korrelationsparameter des Kanals	28
3.3.3.3	Angenommenes Leistungsverzögerungsprofil des Kanals	29
3.4	Nachteile von herkömmlichem OFDM und Gegenstand dieser Arbeit	30
4	Nyquist-Fensterung in OFDM-Empfängern	31
4.1	Parallelen und Beeinträchtigungen	31
4.2	Empfangsfenster mit Erweiterung im Zeitbereich	31
4.3	Eigenschaften der OFDM-Übertragung	33
4.4	MMSE-optimale Form des Empfangsfensters	34
4.4.1	Zerlegung des Nyquist-Empfangsfensters	34
4.4.2	Unterträger-Übertragungsfaktor	35
4.4.3	Definitionen	35
4.4.4	MMSE-Optimierung der Fensterform	36
4.4.5	Asymptotisch optimale Fensterformen	39
4.4.5.1	Dominierendes ICI	39
4.4.5.2	Dominierendes Rauschen	39
4.4.6	Numerische Ergebnisse für MMSE-optimales Fenster	39
4.5	Erweiterungen und Fragestellungen der Implementierung	40
4.5.1	Adaptiver Zeiterweiterungsfaktor	40
4.5.2	Anwendung in OFDM-Systemen ohne rechter zyklischer Fortsetzung	41
4.5.3	Zeiterweiterung in das verbrauchte Schutzintervall hinein	41
4.6	Nahezu optimale Nyquist-Fensterform	41
4.6.1	Nyquist-Fenster mit linearem Verlauf im Übergangsbereich	42
4.6.2	Unterträger-Übertragungsfaktor	42
4.6.3	Optimale Steigung im Übergangsbereich	43
4.6.4	Asymptotisch optimale Ergebnisse	44
4.6.4.1	Dominierendes ICI	44
4.6.4.2	Dominierendes Rauschen	44
4.6.5	Berechnung des SNR im Unterträger	44
4.6.6	Numerische Ergebnisse für MMSE-optimale Steigung	44
4.7	Leistungsvergleich mit anderen Fensterarten	46
4.7.1	Verbesserung des effektiven SNR im Unterträger	46
4.7.2	Spektrale Eigenschaften	47
4.7.3	Simulationsergebnisse für das Übertragungsfehlerverhalten	48
4.8	Zusammenfassung und Schlußfolgerungen	50

5 Spitzenwertreduktion in OFDM	51
5.1 Das Spitzenwertproblem in OFDM	51
5.1.1 Nachteile des hohen Spitzenwerts	51
5.1.2 Analyse der Statistik der Spitzenwerte	52
5.1.3 Ideale Schranke für Spitzenwertreduktion versus Redundanz	55
5.2 Bekannte Verfahren zur Spitzenwertreduktion	57
5.2.1 Hartes Abschneiden im Basisband	57
5.2.2 Multiplikative Signalverzerrung	58
5.2.3 Additive bandbegrenzte Signalverzerrung	58
5.2.4 Kombinierte (Block-)Codierung und OFDM Modulation	59
5.2.5 Iterative Optimierungsalgorithmen	59
5.2.6 Erweiterung der Signalkonstellationen	60
5.2.7 Anforderungen an ideale Methoden	60
5.3 Spitzenwertreduktion mit Selected Mapping (SLM)	61
5.3.1 SLM-Sender	61
5.3.2 SLM-Empfänger	62
5.3.3 SLM-Modems ohne expliziter Seiteninformation	63
5.4 Partial Transmit Sequences (PTS) zur Spitzenwertreduktion	65
5.4.1 PTS-Sender	65
5.4.2 PTS-Empfänger	67
5.4.3 Einige Aspekte zu Implementierung und Effizienz	68
5.4.4 Eine wünschenswerte Variante von PTS	69
5.4.5 Autokorrelationsfunktion der partiellen Sendesequenzen	70
5.4.6 Simulationsergebnisse für die Spitzenwertreduktion mit PTS	75
5.4.7 Eine für die Implementierung günstige Variante von PTS	82
5.4.8 Auswirkung von PTS auf die aktuelle Literatur	87
5.5 Ein Vergleich von PTS und SLM	88
5.6 Eigenschaften des zeitkontinuierlichen OFDM-Signals	92
5.6.1 Zeitkontinuierlich versus zeitdiskret	92
5.6.2 Überabgetastete Basisbandverarbeitung zur Spitzenwertreduktion	95
5.6.3 Simulationsergebnisse mit überabgetasteter Basisbandverarbeitung	95
5.6.4 Phasordiagramme überabgetasteter PTS-OFDM-Signale	100
5.7 Beeinträchtigungen durch Nichtlinearitäten	102
5.7.1 Nichtlineare Übertragungsmodelle	102
5.7.2 Außerbandleistungsdichte von herkömmlichem OFDM	103
5.7.3 Außerbandleistungsdichte von PTS-OFDM	104
5.7.4 Anwendbarkeit von PTS und SLM in anderen Modulationsverfahren	105
6 Rahmen- und Trägerfrequenzsynchronisation für paketisiertes OFDM	107
6.1 Einführung	107
6.2 Paketsynchronisation durch Ausnutzung von Signalwiederholung	108

6.2.1	Bekannte Verfahren	108
6.2.2	Möglichkeiten zur Einfügung von Signalperiodizität	109
6.2.3	Voraussetzungen für die Synchronisation mit Wiederholungsstrukturen	110
6.2.4	Die Sandambel–Struktur	110
6.2.5	Die konventionelle Präambel–Struktur	111
6.2.6	Eigenschaften des Empfangssignals	112
6.2.7	Sandambel im Vergleich zur Präambel	113
6.3	Grobe Rahmensynchronisation mit der Präambel	114
6.3.1	Synchronisationsgrößen	114
6.3.2	MMSE–Metrik	114
6.3.3	ML–Metrik	115
6.3.4	MC–Metric	116
6.3.5	Metrik nach Schmidl–Cox	116
6.3.6	MNC–Metrik	116
6.3.7	Schätzung des Signal–Störabstands	117
6.3.8	Simulationsergebnisse für die pausenlose Übertragung	118
6.3.9	Robustheit von MNC bei Übertragung mit Pausen	121
6.4	Trägerfrequenzsynchronisation	123
6.4.1	Varianz der Frequenzschätzung	123
6.4.2	Benötigte Genauigkeit der Trägerfrequenzschätzung	124
6.4.3	Einfluß einer nichtidealen Rahmensynchronisation	124
6.4.4	Simulationsergebnisse für die Sandambel	126
6.5	Optimale (Rahmen-)Synchronisation mit der Sandambel	127
6.5.1	Herleitung der optimalen Synchronisationsmetrik	127
6.5.2	Bezug zur Metrik für die herkömmliche Wiederholungspräambel	132
6.5.3	Metriken für allgemeine Mehrfachwiederholungspräambeln	132
6.5.4	Simulationsergebnisse für pausenlose Übertragung	132
6.6	Schätzbereichserweiterung für die Frequenz	135
6.6.1	Zusätzliche Korrelationen	135
6.6.2	Grob/Fein Verfahren (CF)	136
6.6.2.1	Algorithmus zur Frequenzschätzung	136
6.6.2.2	Versagensrate für die Frequenzschätzung	137
6.6.3	Fein/Diskret Verfahren (FD)	137
6.6.3.1	Algorithmus zur Frequenzschätzung	137
6.6.3.2	A–priori Wahrscheinlichkeiten für die Intervaldetektion in FD	138
6.6.3.3	Versagensrate für die Frequenzschätzung	139
6.6.3.4	Verbesserung der Versagensrate bei der Frequenzschätzung	139
6.6.4	Leistungseffizienz der Frequenzschätzalgorithmen	140
6.6.4.1	Theoretische Ergebnisse für die Versagensrate	140
6.6.4.2	Simulationsergebnisse mit perfekter Rahmensynchronisation	142

6.7	Rahmensynchronisation aus dem Frequenzbereich heraus	144
6.7.1	Der Algorithmus zur Rahmensynchronisation	144
6.7.2	Untere Schranke für die Varianz der Rahmensynchronisation	147
6.7.3	Simulationsergebnisse	147
6.7.4	Verbesserte differenzielle Demodulation in Frequenzrichtung	149
7	Schlußfolgerungen	151
A	Mathematischer Anhang	153
A.1	Ableitung nach einem Vektor	153
A.2	Einige Ausdrücke für endliche Summen	153
A.3	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Phasenwinkels	154
A.4	Fehlerwahrscheinlichkeitsberechnung	158
B	Anhang zur Synchronisation	159
B.1	Parameterschätzung durch Ausnutzung von Struktur im Signal	159
B.1.1	Schätzung eines skalaren multiplikativen Faktors	159
B.1.2	Phasen(zuwachs)schätzung	161
B.1.2.1	Phasenschätzwert aus einem Block von Beobachtungen	161
B.1.2.2	Untere Schranke nach Cramér–Rao für Phasenschätzproblem	166
B.1.3	Phasenschätzwert aus mehreren Beobachtungsbloeken	168
B.1.4	Einige nützliche Gleichungen	169
B.2	Ableitung der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Einrastposition	171
B.3	Wichtiges zum Einrastbereich der Frequenzschätzer	177
B.3.1	Fangbereichserweiterung mit Hilfe von zwei Korrelationsergebnissen	177
B.3.1.1	Grob/Fein Verfahren (CF)	178
B.3.1.2	Maximum–Likelihood Verfahren	179
B.3.1.3	Fein/Diskret Verfahren (FD)	180
B.3.2	Einrast–Versagensrate	182
B.3.2.1	Frequenzschätzung mit Einzelkorrelation	182
B.3.2.2	Grob/Fein Schätzung	183
B.3.2.3	Fein/Diskret Schätzung	184
	Literaturverzeichnis	187
	Sachverzeichnis	201

Acronyms

acf	autocorrelation function
ADSL	Asymmetric Digital Subscriber Lines
AM/AM	amplitude-dependent amplitude distortion of nonlinearity
AM/PM	amplitude-dependent phase distortion of nonlinearity
ATM	Asynchronous Transfer Mode
ATMmobil	name of German wireless ATM research initiative
AWGN	additive white Gaussian noise
BER	bit error rate (prior to channel decoding)
BRER	bit residual error rate (after channel decoding)
ccdf	complementary cumulative distribution function
CF	crest factor (square root of peak-to-average power ratio)
CF	coarse/fine frequency estimation
CIR	carrier-to-interference power ratio
CPDG	center of power delay gravity of a channel impulse response
CTF	channel transfer factor
DA	decision aided
DAB	Digital Audio Broadcasting
DAPSK	differential amplitude and phase-shift keying
DD	decision directed
DFT	discrete-time Fourier transform
DMT	discrete multitone
DPSK	MDPSK, M -ary differential phase-shift keying
DVB-T	Digital Video Broadcasting (terrestrial transmission mode)
ECB	equivalent complex baseband
ETSI	European Telecommunications Standards Institute
FD	fine/discrete frequency estimation
FIR	finite impulse response
FFT	fast Fourier transform
HiperLAN2	High Performance Radio Local Area Network type 2

ICI	intersubcarrier interference
IDFT	inverse discrete-time Fourier transform
IIR	infinite impulse response
ISI	intersymbol interference
MC	maximum correlation
ML	maximum likelihood
MMSE	minimum mean-squared error
MNC	maximum normalized correlation
MSE	mean-squared error
NCFO	normalized carrier frequency offset
NPV	normalized phase velocity
NSFO	normalized sampling frequency offset
NTO	normalized sampling time offset
OFDM	Orthogonal Frequency-Division Multiplexing
PAM	pulse-amplitude modulation
pdf	probability density function
PDP	power delay profile
PER	packet error rate
ppm	parts per million
PS	partial transmit sequence
psd	power spectral density
PSK	MPSK, M -ary phase-shift keying
PTS	partial transmit sequences (crest-factor reduction method)
QAM	MQAM, M ary quadrature amplitude modulation
rms	root-mean-square value (square root of average power)
SLM	selected mapping (crest-factor reduction method)
SNR	signal-to-noise power ratio
stdv	standard deviation (square root of variance)
STF	subcarrier transfer factor
TDD	time-division duplex
TDMA	time-division multiple access
X-ID	simplified 1-dimensional metric for sandamble with extended guard interval
X-MMSE	minimum mean-squared error metric for extended sandamble
X-MNC	maximum normalized correlation metric for extended sandamble

Important Variables, Constants, and Sets

$\mathbb{R}$	set of real numbers
$\mathbb{C}$	set of complex numbers
$\mathbb{Z}$	set of integer numbers
$\mathbb{F}_2$	Galois field of order 2
$\mathcal{A}$	signal constellation for pulse-amplitude modulation in the subcarriers
$\mathcal{U}$	set with the subcarrier indices of the used (active) subcarriers
α	bandwidth-excess (rolloff) factor for root raised-cosine pulse shaping
γ	oversampling factor for discrete-time ECB processing (for example $\gamma > 1$ in PTS and SLM transmitter processing for CF reduction)
$\zeta_{s(\cdot)}$	(ultimate) crest factor of the continuous-time ECB transmit signal $s(t)$
$\zeta_{p[\cdot]}$	(ultimate) crest factor of the discrete-time ECB transmit signal $p[k]$
$\zeta_{p[\cdot]}[\mu]$	crest factor of discrete-time signal segment during OFDM symbol μ
$\zeta_{\mathcal{A}}$	crest factor of the signal constellation $\mathcal{A}$
ζ_{lb}	lower bound for (ultimate) crest factor
ζ_0	probabilistic crest factor (crest-factor threshold)
θ	time-excess factor for Nyquist windowing
κ	discrete sample index inside an OFDM symbol
$\lambda^{(v)}[\kappa_0]$	energy-normalized periodic autocorrelation function of PS $\mathbf{a}_\mu^{(v)}$
$\lambda[\kappa_0]$	energy-normalized periodic autocorrelation function of transmit sequence $\mathbf{a}_\mu$
μ	discrete OFDM symbol index (or OFDM symbol interval number)
ν	discrete OFDM frequency index (or subcarrier number)
$\xi_t, \hat{\xi}_t$	(estimated) normalized sampling time offset (NTO)
$\xi_f, \hat{\xi}_f$	(estimated) normalized carrier frequency offset (NCFO)
ξ_s	normalized sampling frequency offset (NSFO)
ξ_c	center of power delay gravity (CPDG) parameter
$\sigma_{\xi_t}^2$	variance of normalized time offset estimate in frame synchronization
$\sigma_{\xi_f}^2$	variance of normalized carrier frequency offset estimate
$\sigma_{\mathcal{A}}^2$	variance (mean power) of the signal constellation

σ_a^2	variance (mean power) of the discrete-time transmit signal
σ_s^2	variance of discrete-time signal $p[k]$ in one complex dimension (average signal power)
σ_n^2	variance of discrete-time noise sample $n[k]$ in one complex dimension
ζ_c	channel signal-to-noise power ratio (channel SNR)
ζ_s	effective subcarrier signal-to-noise power ratio (subcarrier SNR)
$\zeta_{c/i}[\nu]$	effective carrier-to-interference power ratio in the receiver for subcarrier index ν
ψ_f	normalized phase velocity (NPV)
$\Delta_f, \hat{\Delta}_f$	integer-valued number of frequency offset interval and its estimate
Δt_{so}	sampling time offset
Δt_{coh}	coherence time of the channel
Δf_{co}	carrier frequency offset
Δf_{coh}	coherence bandwidth of the channel
Δf_{sub}	subcarrier frequency spacing (in receiver)
$\overline{\Phi}_{ss}(f)$	average power spectral density of $s(t)$
$a_\mu[\kappa]$	complex-valued transmit sample at discrete time κ in OFDM symbol μ
$\mathbf{a}_\mu$	transmit sample sequence vector for OFDM symbol μ
$\tilde{\mathbf{a}}_\mu$	peak-power-optimized transmit sequence for OFDM symbol μ
$A_\mu[\nu]$	complex-valued transmitted amplitude in ν -th subcarrier in OFDM symbol μ
$\mathbf{A}_\mu$	transmitted subcarrier amplitude vector in OFDM symbol μ
$\tilde{\mathbf{A}}_\mu$	peak-power-optimized subcarrier amplitude vector in OFDM symbol μ
$b_\mu^{(v)}$	subblock rotation factor in PTS processing
B	input power back-off at nonlinearity in analog domain
$c_\nu^{(v)}$	indicator variable for subcarrier ν in PTS subblock v
$\mathbf{c}^{(v)}$	vector of subcarrier indicator variables for PTS subblock v
$C_H[\nu_0]$	correlation sum for ν_0 -spaced channel frequency bins
D_g	total number of modulation intervals in the guard interval
D_{pr}	number of modulation intervals in cyclic prefix
D_{po}	number of modulation intervals in cyclic postfix
D_u	number of used (nonzero or active) subcarriers in the OFDM symbol
D	size (dimension) of DFT or IDFT in the non-oversampled OFDM scheme
D_s	discrete OFDM symbol spacing (in multiples of the modulation interval)
D_e	length of overall channel impulse response in modulation interval (<u>ex</u> cess length)
D_θ	time-excess parameter for Nyquist windowing
D_{sync}	size (dimension) of the repeatedly transmitted synchronization OFDM symbol

D_{cg}	number of correlation groups in frequency-domain correlation
D_{cig}	number of correlations per group in frequency-domain correlation
D_{cs}	spacing of correlation groups in frequency-domain correlation
D_{m}	frame misplacement (number of interfering modulation intervals (in DFT window) due to frame sync offset)
D_{c}	number of modulation intervals by which the (first) guard interval is extended
E_s	average signal energy per modulation interval T
$g[\kappa]$	discrete-time rolloff modification for time-domain receiver window
$g(\cdot)$	nonlinearity in the analog transmission
G_{ζ}	crest-factor ratio (gain) at some excess probability $P_{\zeta}(\zeta_0)$
$h_{\text{T}}(t)$	impulse response of the pulse-shaping transmit filter
$H_{\text{T}}(f)$	frequency response of the pulse-shaping transmit filter
$h_{\text{C}}(t)$	channel impulse response
$H_{\text{C}}(f)$	channel frequency response
$h_{\text{R}}(t)$	impulse response of the receive filter
$H_{\text{R}}(f)$	frequency response of the receive filter
$h(t)$	impulse response of overall transmission link
$H(f)$	frequency response of overall transmission link
$h[k], h_{\gamma}[k]$	discrete-time impulse response of overall channel (oversampled by factor γ)
$H[\nu]$	discrete channel transfer factor (CTF) at subcarrier ν
$h_{\text{s,T}}^{(\nu)}(t)$	impulse response of the ν -th subcarrier transmit filter
$h_{\text{s,R}}^{(\nu)}(t)$	impulse response of the ν -th subcarrier receive filter
$H_{\xi_f, \xi_s}^{\text{STF}}[\nu_t, \nu]$	subcarrier transfer factor (STF) (transfer characteristic between subcarrier ν_t and ν for carrier and sampling synchronization error ξ_f and ξ_s , respectively)
$I_{\mu}[\nu]$	complex-valued differential transition from subcarrier ν to $\nu + 1$ in OFDM symbol μ
j	imaginary unit, $j^2 \triangleq -1$
k	channel sample number (discrete time)
K	number of samples in an observation block (observation block size)
k_0	correlation basis (spacing of the two samples in a correlation product)
$n[k]$	complex-valued discrete-time receiver noise sample (ECB)
N_0	one-sided noise power spectral density of AWGN
$N_{\mu}[\nu]$	complex-valued amplitude of noise in subcarrier ν of OFDM symbol μ
$p[k], p_{\gamma}[k]$	complex-valued discrete-time transmit amplitude (ECB channel symbol)
$P[k]$	time-domain power sum inside a sliding signal window

$P_{\zeta}(\zeta_0)$	probability that a random OFDM symbol exceeds the crest-factor threshold ζ_0
$P_{\text{tf}}^{(m)}$	time synchronization failure rate (probability that estimated frame start is wrong by more than m samples)
P_{ff}	frequency synchronization failure rate (prob. that frequency estimate is wrong due to a phase-ambiguity error)
$\mathbf{P}^{(u)}$	vector consisting of all rotation factors of subcarrier “scrambler” u
$q \triangleq e^{+j2\pi\xi_f}$	complex factor in Nyquist windowing
$r(t)$	complex-valued continuous-time received signal (ECB)
$r_{\text{f}}(t)$	complex-valued continuous-time received signal after the receive filter (ECB)
$r[k], r_{\gamma}[k]$	complex-valued discrete-time received signal sample (ECB)
$\tilde{r}[k], \tilde{r}_{\gamma}[k]$	complex-valued discrete-time noiseless received signal sample (ECB)
R_{ac}	number of bits used to reduce the crest factor of OFDM (“anticrest” bits)
$s(t)$	complex-valued continuous-time ECB transmit signal
$s[k], s_{\gamma}[k]$	complex-valued samples of ECB signal $s(t)$ (oversampled by factor γ)
s_0	real-valued amplitude threshold for CF evaluation
$S[k]$	time-domain complex correlation for synchronization
T, T_{t}	modulation interval (in receiver and transmitter)
T_{s}	OFDM symbol duration (incl. guard interval)
T_{e}	excess delay of the channel (maximum duration of impulse response)
$\tilde{u}_{\mu}$	number of selected “scrambler” during symbol μ in SLM peak-power reduction
U	number of different mapping rules for SLM peak-power reduction
V	number of subcarrier subblocks for PTS peak-power reduction
$w_D \triangleq e^{-j\frac{3\pi}{D}}$	D -point DFT-constant (unity root)
$w^{\text{t}}[\kappa], w_{\gamma}^{\text{t}}[\kappa]$	discrete-time transmit window (oversampled by γ)
$w[\kappa], w_{\gamma}[\kappa]$	discrete-time receiver window (oversampled by γ)
$w_{\text{rect}}[\kappa]$	discrete-time rectangular receiver window
W	number of admitted angles for PTS subblock rotation with $b_{\mu}^{(v)}$
$X_1[k], X_2[k]$	coarse complex correlations to exploit the extended guard interval
$y_{\mu}[\kappa]$	noisy DFT input sample at discrete time position κ in OFDM symbol μ
$\mathbf{y}_{\mu}$	noisy DFT input sample sequence vector in OFDM symbol μ
$Y_{\mu}[\nu]$	received noisy complex valued ν th subcarrier amplitude in OFDM symbol μ
$\tilde{Y}_{\mu}[\nu]$	received noiseless ν -th subcarrier amplitude in OFDM symbol μ
$\mathbf{Y}_{\mu}$	received noisy subcarrier amplitude vector in OFDM symbol μ

Transforms, Functions, and Operators

$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp(-t^2/2) dt$	complementary Gaussian error integral , $Q(x) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$
$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \exp(-t^2) dt$	complementary error function
$\mathcal{E}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^\infty f(x) p_x(x) dx$	expected value of $f(x)$
$p_x(x), p_x(x y)$	Probability density function (pdf) of random variable x (conditioned on y)
$\Pr\{X\}, \Pr\{X Y\}$	Probability of the discrete event X (conditioned on Y)
$\min_{x \in \mathcal{X}} f(x), \max_{x \in \mathcal{X}} f(x)$	yields the minimum/maximum value of $f(x)$ for x chosen from the set $\mathcal{X}$
$\operatorname{argmin}_{x \in \mathcal{X}} f(x), \operatorname{argmax}_{x \in \mathcal{X}} f(x)$	yields that argument $x \in \mathcal{X}$, for which $f(x)$ achieves its minimum/maximum value
$\Re\{\cdot\}, \Im\{\cdot\}$	real/imaginary part of a complex variable
$z(t) = x(t) * y(t)$	linear convolution , $z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau) d\tau$
$X(f) \bullet \circ x(t)$	continuous-time Fourier transform pair , $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt, x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{+j2\pi ft} df$
$[X[0], \dots, X[D-1]]^T$ $= \text{DFT}_D\{[x[0], \dots, x[D-1]]^T\}$	D -point discrete-time Fourier transformation (DFT) $X[\nu] = \frac{1}{D} \sum_{\kappa=0}^{D-1} x[\kappa] w_D^{\nu\kappa}, \quad 0 \leq \nu < D, \quad w_D = e^{-j\frac{2\pi}{D}}$
$[x[0], \dots, x[D-1]]^T$ $= \text{IDFT}_D\{[X[0], \dots, X[D-1]]^T\}$	D -point inverse DFT (IDFT) $x[\kappa] = \sum_{\nu=0}^{D-1} X[\nu] w_D^{-\nu\kappa}, \quad 0 \leq \kappa < D$

The use of the scaling factor in the DFT/IDFT pair is suited to the use in OFDM.

$\delta[k] = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$	discrete-time Dirac impulse or unit-impulse function
$\delta_0(t)$	continuous-time Dirac impulse, $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta_0(t - \tau) dt = x(\tau)$
$\delta_{-1}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	unit-step function
$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$	signum function
$\text{sis}_b(x) = \begin{cases} \frac{1}{b} \frac{\sin(\pi x)}{\sin(\pi x/b)}, & x \neq kb, k \in \mathbb{Z} \\ (-1)^{k(b+1)}, & x = kb, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$	sis-function for $b \in \mathbb{Z}$
$\arg(\cdot)$	phase angle (argument) of a complex variable in the phase interval $(-\pi, \pi]$
$\log_b(x), \ln(x)$	logarithm of x to base b , natural logarithm of x
$y = \lfloor x \rfloor, y = \lceil x \rceil$	floor/ceil function of $x \in \mathbb{R}$, which yields the next smaller/larger $y \in \mathbb{Z}$
$\mathbf{X} - [f[i, j]]_{\substack{i=i_a, \dots, i_e \\ j=j_a, \dots, j_e}}$	$(i_e - i_a + 1) \times (j_e - j_a + 1)$ matrix with element $f[i, j]$ in $(i - i_a)$ -th row and $(j - j_a)$ -th column
$\mathbf{X}^T$	transpose of matrix/vector $\mathbf{X}$
$\mathbf{X}^H$	conjugate transpose of matrix/vector $\mathbf{X}$ (Hermitian transpose)
$\mathbf{X}^{-1}$	inverse of matrix $\mathbf{X}$
$\text{tr}(\mathbf{X})$	trace of matrix $\mathbf{X}$
$\ \mathbf{x}\ \triangleq \sqrt{\sum_{\nu=0}^{n-1} x[\nu] ^2}$	norm of vector $\mathbf{x} = [x[0], \dots, x[n-1]]^T$
$\mathbf{I}_a$	identity matrix with a rows and a columns
$\mathbf{0}_{a \times b}$	zero matrix with a rows and b columns
$\text{diag}[x[0], \dots, x[n-1]]$	$n \times n$ diagonal matrix with the elements $x[\nu]$, $0 \leq \nu < n$, on the main diagonal