Universität Stuttgart
Institut für Technische und Numerische Mechanik

Dominik Hose

Possibilistic Reasoning with Imprecise Probabilities: Statistical Inference and Dynamic Filtering

SHAKER VERLAG

Band 74 (2022)

Possibilistic Reasoning with Imprecise Probabilities: Statistical Inference and Dynamic Filtering

Von der Fakultät Konstruktions-, Produktions- und Fahrzeugtechnik
der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte Abhandlung

Vorgelegt von
Christian Dominik Hose
aus Offenbach am Main

Hauptberichter:	apl. Prof. Dr.-Ing. Michael Hanss
Mitberichter:	Prof. Scott Ferson, PhD Prof. Ryan Martin, PhD

Tag der mündlichen Prüfung: 20. Mai 2022

Institut für Technische und Numerische Mechanik
der Universität Stuttgart

2022

Schriften aus dem Institut für Technische und Numerische
Mechanik der Universität Stuttgart

Herausgeber: Prof. Dr.-Ing. Prof. E.h. Peter Eberhard

Band 74/2022

Dominik Hose

Possibilistic Reasoning with Imprecise Probabilities: Statistical Inference and Dynamic Filtering

D 93 (Diss. Universität Stuttgart)

Shaker Verlag
Düren 2022

Bibliographic information published by the Deutsche Nationalbibliothek
The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available in the Internet at http://dnb.d-nb.de.

Zugl.: Stuttgart, Univ., Diss., 2022

Copyright Shaker Verlag 2022
All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the prior permission of the publishers.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-8721-5
ISSN 1861-1651

Shaker Verlag GmbH • Am Langen Graben 15a • 52353 Düren
Phone: 0049/2421/99011-0 • Telefax: 0049/2421/99011-9
Internet: www.shaker.de • e-mail: info@shaker.de

Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Technische und Numerische Mechanik (ITM) der Universität Stuttgart. Ich werde die fünf Jahre, in denen ich dort arbeiten und forschen durfte, als wundervolle Zeit in Erinnerung behalten und blicke gerne darauf zurück.

Auch wenn sich das Verfassen meiner Doktorarbeit für mich oft wie ein großer Kraftakt angefühlt hat, so konnte ich mir doch immer der Unterstützung vieler Menschen sicher sein, die in dieser Zeit ein wichtiger Bestandteil meines Lebens waren und es hoffentlich auch in Zukunft sein werden. Ihnen gilt es an dieser Stelle zu danken, denn ohne sie wäre diese Arbeit wohl gar nicht – oder wenigstens unter deutlich unangenehmeren Umständen – zustande gekommen.

Mein Doktorvater, Michael Hanss, hatte hierbei sicherlich den unmittelbarsten Anteil. Ich habe seine lockere Art der Betreuung seiner Doktoranden als sehr angenehm empfunden. Diese äußerte sich insbesondere durch einen großen Vorschuss an Vertrauen und viele Freiheiten, die er mir jederzeit gewährte und die es mir ermöglichten, unbeirrt an meinen Ideen zu arbeiten, nachdem ich meinen Weg gefunden hatte – eine Promotion muss am Anfang ja bekanntlich wehtun. Auch wenn er sich bestimmt manchmal gewünscht hätte, diese Ideen wären etwas weniger 'verquast', ließ er mich meinen eigenen Weg gehen und zeigte trotzdem immer großes Interesse und Begeisterung für meine Forschung. Auch meine Mitberichter haben ihre Rollen mehr als erfüllt und mich weit über das übliche Maß hinaus in meiner Arbeit unterstützt. So hat mir Scott Ferson in unzähligen virtuellen Runden zusammen mit seinen Mitarbeitern – an dieser Stelle sei auch Ander Gray, Alexander Wimbush und Marco de Angelis gedankt – viele kritische, und dadurch wertvolle, Fragen gestellt und Anmerkungen geliefert, um meine Ergebnisse zu durchleuchten. Vor allem aber hat er mich immer wieder dazu herausgefordert, diese Ideen aufs Neue zu formulieren bis sich schlussendlich die hier dargelegte Form herauskristallisiert hatte. Auch wenn ich ihn vermutlich bei der Erfüllung seines Wunsches, ich möge eine allgemeinverständliche Theorie formulieren, um sie einem breiteren Publikum zugänglich zu machen, im Stich gelassen habe – er hat seinen Unmut darüber regelmäßig zum Ausdruck gebracht (und das zu Recht!) –, so glaube ich doch, dass das Ergebnis insbesondere durch sein Mitwirken an Qualität gewonnen hat. Ihm und mir, aber sicherlich auch allen anderen, die an ähnlichen Theorien arbeiten, steht eine Theorie der Unsicherheiten vor Augen, die belastbar und allgemeingültig, aber eben auch elegant und allgemeinverständlich ist. Allein der Umfang dieses Dokuments spricht jedoch offensichtlich gegen die Einfachheit der Materie und in diesem Sinne bin ich wohl an seinen Ansprüchen gescheitert, eine so geartete Theorie darzulegen. Mir war das bereits vor ihm klar, aber ihm muss zugutegehalten werden,

dass er bis zuletzt an meine Fähigkeiten geglaubt hat. Auch von Ryan Martin habe ich jederzeit großes, und vor allem ehrliches, Interesse an meiner Arbeit erfahren und viel Zuspruch und Ermunterung bekommen. Sein größtes Kompliment an mich ist in jedem Fall, dass er Teile meiner Arbeit bereits kurz nach der Lektüre meiner Dissertation, in seiner eigenen Forschung weiterentwickelt hat. Dadurch hat sich, so hoffe ich, mein Wunsch erfüllt, einen kleinen, aber bleibenden, wissenschaftlichen Beitrag geleistet zu haben. Ich vertraue darauf, dass Ryan in der Lage ist, sowohl meine als auch seine Ergebnisse und die von anderen in der von Scott geforderten Form zusammenzuführen.

Gewidmet habe ich diese Dissertation den beiden Frauen, die mich dorthin gebracht haben, wo ich heute bin: meiner Mutter und Nana, meiner Großmutter. Schon während meiner Grundschulzeit war Nana klar, dass 'der verkopfte Junge' einmal promovieren würde, wenn sie auch noch nicht wusste, worüber – sie hat nie an mir und meinen Fähigkeiten gezweifelt und mich immer unterstützt. Meine Mutter hat meine Laufbahn überhaupt erst ermöglicht, indem sie das Wohl ihrer beiden Söhne zu jeder Zeit über ihr eigenes gestellt hat. Eine glückliche Kindheit und Jugend sind ein wertvoller Schutz gegen die Unwägbarkeiten des Lebens und in meiner Familie habe ich immer den nötigen Rückhalt gefunden. Dazu gehören auch mein Bruder, dessen Anteil in Form hochwillkommener Ablenkung nicht zu unterschätzen ist, und mein Vater, der mein Interesse an den Natur- und Technikwissenschaften immer gefördert hat. Auch meine Gasteltern, Dorothea und George van Ravenswaay, mitsamt ihren Eltern, Kindern und Geschwistern sollen hier nicht unerwähnt bleiben. Ohne zu übertreiben kann ich sagen, dass ich mit ihnen eine zweite Familie in Kanada gefunden habe, und ohne sie wäre die vorliegende Schrift wohl in deutscher Sprache verfasst worden.

Das ITM ist sicherlich kein Ort, an dem man fünf Jahre tätig sein kann ohne in anfänglichen Kollegen spätere Freunde zu finden. Diese bildeten für mich alleine schon durch ihre vergleichbare Situation eine emotionale Stütze, ich konnte mit ihnen aber auch wunderbar fachlich zusammenarbeiten. Dazu gehören u.a. Alexander Brauchler, Benjamin Fröhlich, Dominik Hamann, Steffen Maier, Patrick Schmid, Georg Schneider und Elizaveta Shishova. Zuvorderst hat mich Markus Mäck über den Großteil meiner Promotion hinweg begleitet, zunächst als Betreuer meiner Masterarbeit und dann als enger Forschungspartner, der meinen gelegentlich überschwänglichen Enthusiasmus ertragen musste. Ich werde die gemeinsamen Konferenzen, Fach- und Privatdiskussionen mit ihm in bester Erinnerung behalten. Die feste Konstante während meiner universitären Laufbahn war Henrik Ebel. Wir haben über mehr als zehn Jahre hinweg zusammen studiert, gearbeitet und promoviert. Sein Beitrag zum Gelingen meiner Promotion ist in vielerlei Hinsicht unschätzbar und ich bin dankbar, ihn so lange als Mitstreiter an meiner Seite gehabt zu haben.

An dieser Stelle sollte klar geworden sein, dass das ITM für mich weit mehr als eine bloße Forschungs- und Arbeitsstelle war. Überhaupt hat mich erst Jörg Fehr dorthin geholt, der meinen Weg auch später mit viel Enthusiasmus und Unterstützung begleitet

hat. In vielerlei Hinsicht ist die familiäre Atmosphäre am ITM aber auch seinem Leiter, Peter Eberhard, zu verdanken, der seinen Mitarbeitern jederzeit den Rücken freihält und ihnen die notwendigen Rahmenbedingungen schafft, damit sie sich und ihre Forschung frei entfalten können. Er hat mir eine einmalige Erfahrung ermöglicht, um die mich viele andere Doktoranden sicherlich beneiden. Ebenfalls bedanke ich mich bei Pascal Ziegler für viele interessante Diskussionen, in denen teils sehr unterschiedliche Sichtweisen aufeinander getroffen sind. Auch die von mir betreuten studentischen Arbeiten von Andreas Baumann, Sebastian Feige, Lennart Frie, Julius Herb, Tom Könecke, Kim Kröner, Nils Poslovski, Nathanael Römheld, Henrik Schühle und Sophie Schütt haben mir erheblich beim Verfassen meiner Dissertation geholfen.

Das ITM und die Universität Stuttgart werden für mich nicht zuletzt immer auch deswegen eine besondere Bedeutung haben, weil ich dort meine Partnerin, Luzia Hahn, kennenlernen durfte. Sie hat zum Abschluss der Promotion nicht nur für den Erhalt meiner Vitalfunktionen gesorgt, sondern mir jederzeit viel Verständnis entgegengebracht und Rückhalt gegeben. Ihren Beitrag werde ich wahrscheinlich erst vollständig nachvollziehen können und zu schätzen wissen, wenn wir einmal die umgekehrten Rollen haben. In jedem Fall freue ich mich auf die nächsten Kapitel mit ihr, die wir dann gemeinsam in einem anderen Buch schreiben werden.

Natürlich müsste ich hier noch weitaus mehr Personen danken, aber einen Anspruch auf Vollständigkeit könnte wohl keine Liste erheben. Nichtsdestotrotz möchte ich auch folgende Personen erwähnt wissen, die mir in der einen oder anderen Weise auf meinem Weg zur Seite gestanden haben: Gudrun und Hellmuth Hose, Therese Hose, Ruth Jähnig, Oliver Pantle, Bettina und Michael Schütterle, Louisa Bergmann, Emily Höhning, Benedikt Konersmann, Marcel Konstantinov, Conny Le, Catharina Zipper, Nikolai Arnaudov, Tobias Kattman, Jakob Kirch, Raphael Leiteritz, Jakob Rempel, Frank Schneider, Katrin Stollenmeier, Tobias Willmann, Marion Seitz, Michael Blasek und Hildegard Bauer.

Vielen Dank euch allen!

– *Für Mama und Nana*

Contents

Zusammenfassung XI

Abstract XIII

1 Introduction **1**

1.1 Types of Uncertainty 2

1.2 Languages of Uncertainty 4

1.3 Possibilistic Uncertainty Quantification 9

1.4 Composition and Contributions of this Thesis 10

2 Possibilities and Imprecise Probabilities **13**

2.1 Probability and Possibility Measures 13

2.2 Qualitative Possibility Theory 26

2.3 Quantitative Possibility Theory 28

3 Imprecise Variables **49**

3.1 Distributions 49

3.2 Extension 58

3.3 Stochastic Dominance 69

3.4 Imprecise Expectations and Moments 74

3.5 Dependency and Interaction 78

4 Possibilistic Statistics **91**

4.1 Statistical Setup 93

4.2 Inferential Models 94

4.3 Possibilistic Inference 110

5 Membership Computations **135**

5.1 Membership Transforms 135

5.2 Membership Arithmetic 141

6 Possibilistic Filtering **165**

6.1 Formulation 166

6.2 Implementation 179

6.3 Application: Robot Localization 184

7 Conclusion and Outlook **193**

Appendices **197**

Bibliography **201**

Nomenclature and Notation **215**

Zusammenfassung

Numerische Simulationen sind ein integraler Bestandteil technischer Entwurfsprozesse für verschiedenste Arten von Systemen. Die dazu verwendeten Modelle zeichnen sich häufig dadurch aus, dass sie eine Vielzahl von Effekten berücksichtigen, die eine möglichst große Realitätsnähe zum Ziel haben. Aufgrund ihrer stetigen Weiterentwicklung und der damit einhergehenden zunehmenden Berücksichtigung auch weniger einflussreicher Effekte und Dynamiken wächst die Komplexität dieser Simulationsmodelle meist kontinuierlich.

Beim Abgleich solcher Modelle mit Messdaten aus den abbgebildeten physikalischen Systemen sind zwei Effekte häufig zu beobachten. Zum einen ist die präzise Bestimmung bzw. die Spezifikation aller darin enthaltenen Parameter aus verschiedenen Gründen oft nicht möglich – teilweise drücken diese auch überhaupt keine physikalischen Größen aus, die sich z.B. messen ließen. Zum anderen beinhalten viele physikalische Prozesse ein natürliches Maß an natürlicher Variabilität, die sich auch mit hochgenauen deterministischen Modellen nicht beschreiben lässt. Sollen nun die realen Messungen zur Kalibrierung der unbekannten Parameter verwendet werden, ist offensichtlich, dass verrauschte Daten niemals eine exakte Bestimmung erlauben. Dadurch bedingt können wiederum keine beliebig genauen Aussagen, insbesondere Vorhersagen, über das Systemverhalten getroffen werden. Solche Beobachtungen bieten einen direkten Zugang zur Unsicherheitsanalyse, die zum Ziel hat, ebendiese Unsicherheiten zu beschreiben, zu quantifizieren und damit zu rechnen.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit possibilistischen, d.h. möglichkeitsbasierten, Methoden zur statistischen Inferenz mit unscharfen Wahrscheinlichkeiten und ist einem jungen Teilgebiet der Statistik und Unsicherheitsforschung zuzuordnen, welche ihren Ursprung in der Evidenztheorie nach Dempster und Shafer, aber auch in der Theorie der unscharfen Mengen von Zadeh hat. Dazu wird ein ganzheitlicher Ansatz verfolgt, der eine solide mathematische Basis mit einer praktischen Umsetzung verknüpft. In diesem Sinne liefert diese Arbeit einen Beitrag zur angewandten Theorie der unscharfen Wahrscheinlichkeiten, indem sie theoretische und numerische Erkenntnisse mit Anwendungen aus den Ingenieurwissenschaften verknüpft und aufzeigt, wie possibilistische Methoden gewinnbringend dort eingesetzt werden können.

Im ersten Kapitel der Arbeit wird die Möglichkeitstheorie historisch und philosophisch in die Theorie der Unsicherheitsanalyse bzw. in die zugrundeliegende Statistik eingeordnet. Die verschiedenen Arten von Unsicherheiten, insbesondere epistemische und aleatorische, werden erörtert, und es werden verschiedene mathematische Beschreibungsformen – Intervalle, scharfe und unscharfe Wahrscheinlichkeiten, und sogenannte Möglichkeiten – erläutert.

Der grundlegenden Behauptung des ersten Kapitels, nämlich dass die Möglichkeitstheorie sich zur Beschreibung von unscharfen Wahrscheinlichkeiten, also Mengen von Wahrscheinlichkeitsmaßen, eignet, wird sodann im zweiten Kapitel nachgegangen. Beginnend mit einem axiomatischen Aufbau der Möglichkeits- oder Possibilitätstheorie wird diese auf

vielfältige Weise in Bezug sowohl zur klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie als auch zu anderen Theorien zur Beschreibung unscharfer Wahrscheinlichkeiten gesetzt. Ein erstes Hauptresultat ist hierbei die (Imprecise-Probability-to-Possibility-)Transformationsvorschrift, die sich mithilfe weniger fundamentaler Prinzipien motivieren lässt und es erlaubt, ebendiese unscharfen Wahrscheinlichkeiten possibilistisch zu beschreiben.

Diese Transformationsvorschrift stellt auch im Weiteren, insbesondere im dritten Kapitel, ein essentielles Werkzeug im Umgang mit unscharfen Wahrscheinlichkeiten dar. Dort wird aufgezeigt, wie sich verschiedenste Arten von (unscharf-)probabilistischen Informationen, z.B. stochastische Dominanz, unscharfe Erwartungswerte, aber auch präzise Wahrscheinlichkeitsverteilungen, oder eben die Abwesenheit solcher Informationen modellieren lassen. Weiterhin wird aufgezeigt, wie sich auf Basis des neu entwickelten, impliziten Erweiterungsprinzips mit Möglichkeitsverteilungen rechnen lässt, wie sich diese kombinieren lassen und wie sich verschiedene Arten von Abhängigkeiten beschreiben lassen.

Diese Vorüberlegungen bereiten die Grundlage für eine neue Theorie possibilistischer Inferenzmodelle im vierten Kapitel. Diese bilden den Übergang zur Statistik und erklären, wie sich Informationen aus Daten gewinnbringend in possibilistischen Beschreibungen verwenden lassen. Der Zusammenhang zwischen jenen Modellen und diesen Beschreibungen bildet der sogenannte Pivot-Schritt, welcher klassische Konzepte der (allgemeinen) Inferenzmodelle nach Martin und Liu und der Möglichkeitstheorie zusammenführt und dadurch einen neuartigen Zugang zur Statistik – insbesondere der frequentistischen – schafft.

Ein Schwerpunkt dieser Arbeit ist die numerische Umsetzung der possibilistischen Unsicherheitsanalyse, die auf mehrere Arten erfolgen kann, z.B. mittels sampling-basierter oder intervall-basierter Verfahren. Beide werden im fünften Kapitel mit Bezug auf ihre Vor- und Nachteile im Detail besprochen und es werden Methoden zur Implementierung des Erweiterungsprinzips und der Imprecise-Probability-to-Possibility-Transformation bzw. ihrer Varianten vorgestellt. Zusammengefasst zeichnen sich Samplingverfahren sowohl durch ein hohes Maß an Flexibilität als auch durch eine unkomplizierte Implementierung aus; der Vorteil intervallbasierter Methoden liegt in konservativen Berechnunen und Abschätzungen, die sich insbesondere zur Anwendung auf sicherheitskritische Systeme eignen.

Im sechsten Kapitel werden die theoretischen und numerischen Resultate auf ein praktisches Beispiel aus der Regelungstechnik angewandt, nämlich das Filterproblem, in dem aus Beobachtungen eines dynamischen Systems und seiner mathematischen Beschreibungen der derzeitige Systemzustand abgeleitet werden soll. Dazu wird ein possibilistischer Partikelfilter hergeleitet, wobei wiederum die vorteilhaften Eigenschaften der sampling-basierten Umsetzung des Erweiterungsprinzips ausgenutzt werden. Anhand eines Lokalisierungsbeispiels aus der Robotik wird die Funktionsweise dieses Filterprinzips demonstriert.

Das letzte Kapitel beginnt mit einigen Schlussbemerkungen und endet mit einer Erörterung von möglichen zukünftigen Forschungsthemen im Bereich der Möglichkeitstheorie.

Abstract

Numerical simulations are an integral part of the design process for various types of systems. The models used for this purpose are often characterized by many effects they take into account intended to achieve high-fidelity, i.e. being as close to reality as possible. Due to continuous refinements and the ensuing increased consideration of less influential effects and dynamics, the complexity of these simulation models usually grows over time.

Two effects can often be observed when checking such models against measured data from the described physical systems. On the one hand, a precise specification of all parameters in these models is often impossible for various reasons—sometimes, they do not even describe any physical quantities that could be measured. Moreover, many physical processes contain a natural degree of variability which cannot be described by deterministic models, not even by highly accurate ones. If actual measurements are to be used to calibrate the model, i.e. its unknown parameters, it is evident that noisy data will never allow an exact inference. This inexactness, in turn, implies that arbitrarily accurate statements, especially predictions, cannot be made about the behavior of the physical system. Such observations provide a direct motivation for uncertainty quantification, which aims to describe, quantify, and compute these very uncertainties.

This thesis considers possibilistic methods for statistical inference with imprecise probabilities. In this sense, it belongs to a young subfield of statistics and uncertainty quantification which has its origins in the Dempster-Shafer theory of evidence and the theory of fuzzy sets by Zadeh. More precisely, it makes a contribution to the applied theory of imprecise probabilities by linking theoretical and numerical insights with practical applications in engineering and showing how possibilistic methods can be used profitably.

In the first chapter, possibility theory is contextualized historically and philosophically among the various competing theories of uncertainty quantification and statistics. Different types of uncertainty, primarily epistemic and aleatory ones, are discussed, and various mathematical frameworks for their description—intervals, precise and imprecise probabilities, and so-called possibilities—are motivated and introduced.

The fundamental claim of the first chapter, namely that possibility theory is suitable for describing imprecise probabilities, i.e. sets of probability measures, is then investigated in the second chapter. Beginning with an axiomatic approach to possibility theory, it is linked to classical probability theory and other theories of imprecise probabilities next. The first main result is the Imprecise-Probability-to-Possibility Transformation, which can be motivated by a few fundamental principles and allows to describe imprecise probabilities possibilistically.

This transformation rule is also an essential tool for dealing with imprecise probabilities in the following, especially in the third chapter. Therein, it is shown how different kinds

of (imprecise-)probabilistic information, e.g. stochastic dominance, imprecise expected values, and precise probabilities, or the absence of such information, can be modeled. Moreover, it is shown how to compute with possibilities based on the newly derived implicit extension principle, how they can be combined, and how different kinds of dependencies between imprecise or random variables may be described.

These preliminary considerations prepare the ground for a novel theory of possibilistic inferential models in the fourth chapter that constitute the connection to statistics and explain how data can refine possibilistic descriptions. This connection is established via the Pivotal Step, which brings together concepts of (general) inferential models by Martin and Liu and of possibility theory, thereby creating a novel approach to statistics—in particular, to frequentist inference.

This thesis also focuses on the numerical implementation of possibilistic calculus, which is using both sampling-based and interval-based methods. Both methods are discussed in detail in chapter five regarding their advantages and disadvantages, and methods for implementing the extension principle, the Imprecise-Probability-to-Possibility-Transformation, and its variants are given. In summary, sampling methods are characterized by a high degree of flexibility and a straightforward implementation; the advantage of interval-based methods lies in conservative computations, which are particularly suitable for application to safety-critical systems.

In the sixth chapter, the theoretical and numerical results are applied to a practical example from control engineering, namely the filtering problem, in which the current state of a system is to be inferred from observations of a dynamic system and its mathematical description. For this purpose, a possibilistic particle filter is derived, exploiting the advantageous properties of the sampling-based implementation of the extension principle. Finally, a localization example from robotics is intended to demonstrate the properties and functionality of this filter.

The final chapter begins with some concluding remarks and ends with an outlook on potential future research topics in the area of possibility theory.