Arthur Martirosian

Witt groups of maximal isotropic Grassmann bundles

SHAKER VERLAG

Witt groups of maximal isotropic Grassmann bundles

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

vorgelegt von

Arthur Martirosian
aus Ansbach

Düsseldorf, November 2021

Aus dem Mathematischen Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Gedruckt mit Genehmigung der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Referent: Prof. Dr. Marcus Zibrowius

Koreferent: Prof. Dr. Nicolas Perrin

Tag der mündlichen Prüfung: 11.02.2022

Berichte aus der Mathematik

Arthur Martirosian

Witt groups of maximal isotropic Grassmann bundles

D 61 (Diss. Universität Düsseldorf)

Shaker Verlag
Düren 2022

Bibliographic information published by the Deutsche Nationalbibliothek
The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available in the Internet at http://dnb.d-nb.de.

Zugl.: Düsseldorf, Univ., Diss., 2022

Copyright Shaker Verlag 2022
All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the prior permission of the publishers.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-8544-0
ISSN 0945-0882

Shaker Verlag GmbH • Am Langen Graben 15a • 52353 Düren
Phone: 0049/2421/99011-0 • Telefax: 0049/2421/99011-9
Internet: www.shaker.de • e-mail: info@shaker.de

Zusammenfassung

Bereits im frühen 20. Jahrhundert untersuchte Ernst Witt symmetrische und antisymmetrische Bilinearformen auf Vektorräumen, deren Klassifizierung schließlich zur Definition der Wittgruppe über einem Körper führte. Erst wesentlich später definierte Balmer *derivierte Wittgruppen* von Schemata, welche nun auch in verschiedenen Graden und Twists auftreten. Dies motiviert die *totale Wittgruppe* eines Schemas,

$$W^{\mathrm{tot}}(X) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/4} \bigoplus_{L \in \mathrm{Pic}(X)/2} W^i(X, L), \tag{1}$$

in welcher die für Körper bereits bekannte Wittgruppe im Grad Null und trivialem Twist auftritt, d.h. $W(X) = W^0(X, \mathcal{O}_X)$ für $X = \mathrm{Spec}(k)$. Seitdem wurden viele Methoden für die Berechnung der Wittgruppen entwickelt, wie zum Beispiel die lange exakte Lokalisierungssequenz von Balmer ([Bal00]).

Maximale isotrope Grassmannbündel parametrisieren die bezüglich einer gegebenen symmetrischen oder antisymmetrischen Bilinearform isotropen Unterbündel maximalen Rangs eines fixierten Vektorbündels und die Berechnung deren Wittgruppen ist das Ziel dieser Arbeit. Den Fall gewöhnlicher Grassmannschen haben Balmer und Calmès bereits behandelt ([BC12a]), indem sie die Randabbildung der Lokalisierungssequenz untersucht haben. Es stellte sich heraus, dass die totale Wittgruppe mithilfe *gerader Young-Diagramme* beschrieben werden kann und, dass sogar die Grade und Twists an den Diagrammen direkt abgelesen werden können.

Auch wenn diese Methode auf keinen der beiden zu untersuchenden Fälle uneingeschränkt übertragen werden kann, beweisen wir ein analoges Resultat über die totale Wittgruppe, diesmal mithilfe *gerader* und *fast gerader versetzter Young-Diagramme*. Allerdings fällt die Aussage im antisymmetrischen Fall etwas schwächer aus, da hier keine explizite Basis angegeben werden kann.

Das Vorgehen von Balmer-Calmès kann auch direkt auf Quadriken angewandt werden. Daher führt diese Arbeit zur vollständigen Beschreibung der Wittgruppen von Klassen homogener Varietäten gewöhnlichen Lie-Typs, welche als *minuscule* und *cominuscule* bezeichnet werden. Es ist wahrscheinlich, dass auch für die beiden exzeptionellen (co-)minuscule Varietäten, nämlich die Cayley-Ebene sowie die Freudenthal-Varietät, eine Beschreibung der Wittgruppen durch spezielle Young-Diagramme möglich ist, was zum jetzigen Zeitpunkt jedoch unklar ist.

Abstract

Named after Ernst Witt, Witt groups were first introduced for fields in the earlier 20th century to classify symmetric and or antisymmetric bilinear forms over them. Much later, Balmer introduced derived Witt groups of schemes ([Bal99]), including shifted and twisted Witt groups. This yields the notion of the *total Witt group* of a scheme X,

$$W^{\mathrm{tot}}(X) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/4} \bigoplus_{L \in \mathrm{Pic}(X)/2} W^i(X, L), \tag{2}$$

which includes the well-known Witt group $W(X) = W^0(X, \mathcal{O}_X)$ for a field $X = \mathrm{Spec}(k)$. Since then, many strong tools for the computation of Witt groups have been developed, such as the long exact localization sequence by Balmer [Bal00].

The goal of this work is to compute the Witt groups of maximal isotropic Grassmann bundles, that is, schemes parametrizing subbundles of maximal rank of a fixed vector bundle which are isotropic with respect to a given symmetric or antisymmetric bilinear form. The case of non-isotropic Grassmannians has been accomplished by Balmer and Calmès ([BC12a]) by investigating the boundary map in the localization long exact sequence of Witt groups. It turns out that the total Witt group (2) is indexed by *even Young diagrams* and the twists and shifts can easily be read off the tableaux.

Although the ordinary approach cannot be applied entirely to neither of the isotropic cases, we manage to describe the total Witt group in these cases by using *even* and *almost even shifted Young diagrams*. At this point we remark that the result for the antisymmetric case is weaker in the sense that no explicit basis has been computed.

It is known that the same procedure can be applied to quadrics. Hence, this thesis will lead to a complete description of the Witt groups of minuscule and cominuscule homogeneous varieties of ordinary Lie types. We believe, that similar results can be obtained for the Cayley plane and the Freudenthal variety, the only exceptional minuscule varieties, but this remains open.

Contents

Introduction **1**

1 Preliminaries **7**

1.1 Isotropic vector bundles 7

1.2 Witt groups 8

1.2.1 Witt groups of exact categories 8

1.2.2 Triangular Witt groups: Derived Witt groups of schemes 11

1.2.3 Coherent Witt groups 14

1.2.4 Pull-backs, push-forwards, base change 14

1.2.5 Witt groups with support 16

1.2.6 Localization 17

1.2.7 Projective bundles 18

1.2.8 The Balmer-Calmès setup 19

1.2.9 Lax-similtude 21

1.2.10 Total bases 22

1.3 Functors of points 25

1.4 Grassmann and flag bundles 27

1.5 Schubert calculus 36

1.5.1 Homogeneous spaces 36

1.5.2 Schubert varieties 39

1.5.3 Shifted, even and almost even Young diagrams 40

1.5.4 Young diagrams parametrize Schubert varieties 47

1.5.5 Quivers of minuscule and cominuscule varieties 49

2 Witt groups of maximal orthogonal Grassmannian bundles **57**

2.1 Resolutions of degeneracy loci 57

2.2 Construction of the basis 60

2.3 The blow-up setting 64

2.4 Main Theorem 73

3 Witt groups of Lagrangian Grassmann bundles 77
3.1 The extended blow-up setting 78
3.2 The connecting homomorphism revisited 81
3.3 The connecting homomorphism for $\mathrm{LG}(2m+1)$ 86
3.4 Construction of a basis - an approach 94

4 Conclusions and examples 101
4.1 Combinatorics on shifted Young diagrams 101
4.2 Reformulation for the maximal orthogonal case 104
4.3 Reformulation for the Lagrangian case 106
4.4 Enumerative results. 108
4.5 Summary and perspectives 116

Bibliography 119