

**Uwe Kraeft**

**Untersuchungen zur Folge der  
Primzahlen**

**Untersuchungen  
zur Folge  
der Primzahlen**

**Uwe Kraeft**

2022



Berichte aus der Mathematik

**Uwe Kraeft**

**Untersuchungen zur Folge der Primzahlen**

Shaker Verlag  
Düren 2022

**Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Copyright Shaker Verlag 2022

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-8339-2

ISSN 0945-0882

Shaker Verlag GmbH • Am Langen Graben 15a • 52353 Düren

Telefon: 02421 / 99 0 11 - 0 • Telefax: 02421 / 99 0 11 - 9

Internet: [www.shaker.de](http://www.shaker.de) • E-Mail: [info@shaker.de](mailto:info@shaker.de)

## Vorwort

Primzahlen sind bekanntlich natürliche Zahlen 2, 3, 5, 7, 11, ... , die ohne Rest durch keine anderen natürlichen Zahlen als durch sich selbst teilbar sind. Sie stellen sozusagen die Atome der Zahlentheorie dar und sind Ausgangspunkt für viele Überlegungen. Dabei stehen „Formeln“ und Algorithmen zur Generierung mit an erster Stelle.

Das Buch ist zum großen Teil eine kurze Zusammenfassung von ausgewählten thematisch relevanten Teilen früherer Veröffentlichungen des Autors, die übersetzt und ergänzt wurden (siehe Seite v unten).

Mit dem vorliegenden Text werden die „Untersuchungen zum Konvergenzverhalten der Eta- und Zetareihe“ sowie die „Untersuchungen der pythagoreischen Tripel und der Vermutung von Fermat“ des Autors im Hinblick auf das praktische Grenzwertverhalten von reellen beziehungsweise natürlichen Zahlen vervollständigt.

Hier werden in 8 Kapiteln, nach einer Einführung und historischen Anmerkungen, die Konstruktion von Primzahlen in begrenzten Intervallen, die Folge  $6m \pm 1$  der Primzahlen, Fakultäten zur Generierung von Primzahlen, ausgewählte Formeln zur Struktur der Primzahlen, die Folge der Primzahlen I beziehungsweise II, Primzahldifferenzen und Primzahlfolgen sowie Primzahlpaare in elementarer Darstellung einführend behandelt.

In einem Anhang sind Programme zur Berechnung von Primzahlen beziehungsweise Faktorisierung von zusammengesetzten natürlichen Zahlen zu finden.

Eine Literaturliste ist beigefügt. Die Literaturzitate betreffen wie in den vorangehenden Bänden dieses „Lehrgangs der Mathematik“ (siehe Seite 101) nicht nur die Übernahme von Inhalten, sondern sind auch ein Hinweis für interessierte Leser zur weiteren Information.

In einem weiteren Anhang findet sich eine Zusammenfassung von Anwendungen bei der elementaren Berechnung von Primzahlenfolgen.

Es folgen Ergänzungen zu dem Text „Vira - Viruses - Viren“ des Verfassers (2020, Shaker Verlag, Düren).

Das Buch stellt die Meinung des Autors nach dem Studium der Literatur und dessen Kenntnissen dar. Der Inhalt wurde sorgfältig auf Fehler geprüft, die aber nicht gänzlich ausgeschlossen werden können. Eine Gewährleistung oder Garantie für die Richtigkeit des Textes kann nicht übernommen werden. Ich bin für entsprechende Hinweise oder Verbesserungsvorschläge dankbar.

Leimen, im Oktober 2021  
<http://www.uwe-kraeft.de/>

Uwe Kraeft

## Auswahl von elementaren Symbolen

$\Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow$	hieraus folgt (in den angegebenen Richtungen)
$\in$	ist Element von (ist enthalten in)
$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen 1, 2, 3, ...; $\mathbb{N}^0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
$P$	Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, ...
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...
$\mathbb{R}$	Körper der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	Körper der komplexen Zahlen $x+iy$
$f(x)$	Bild des Originals $x$
$=$	nur in der reinen Mathematik genau gleich (identisch); wird praktisch auch für Grenzwerte verwendet
$\cong$	so nah wie gewünscht, aber nicht gleich
$\approx$	ungefähr, gerundet, kann angenähert werden
$\sim$	von ähnlicher Größenordnung
$\neq$	ungleich
$\equiv$	kongruent, ( $a \equiv b \pmod{c}$ ) oder $a \equiv b_c$ bedeuten zum Beispiel für $a, b, c \in \mathbb{N}$ und $a > b$ : $(a-b)/c \in \mathbb{N}$
$(a, b, c) = n$	größter gemeinsamer Teiler (Faktor) ggT von $a, b, c \in \mathbb{N}$ ist $n \in \mathbb{N}$ (für $n=1$ : (Primzahl-)teilerfrei)
$<, \leq, >, \geq$	kleiner, kleiner oder gleich, größer, größer oder gleich
$\sqrt{\quad}$	Quadratwurzel
$\sum a_i$	Summe, zum Beispiel $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$
$\cdot, \times, *$	Multiplikationszeichen
$n!, p!$	$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ , $p! = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot p$ mit $n \in \mathbb{N}$ , $p \in P$
$\prod c_i$	Produkt, zum Beispiel $c_1 c_2 c_3 \dots$
<b>Anm.</b>	Anmerkung

Weitere Symbole werden im Text erläutert.

Es wurden unter anderem folgende frühere Veröffentlichungen des Autors verwendet (Kr-1 bedeutet: Kr Kapitel 1; Abkürzungen der Titel, zum Beispiel Kr, siehe Seite 111 bis 112 und Seite 101 bis 102):

primes, prime elements, Primzahlen

Kr-1, 3, 10, 11, 12, 24, 31, 32; Kr2-2, 4; Kr5-10; Kr6-9; Kr11;  
Kr13-2, 5, 6, 15; Kr14-8, 9; Kr15-7; Kr21-7; Kr22-3, 6, 7;  
Kr23-9; Kr24-6;

prime twins (pairs), Primzahlpaare

Kr1-2; Kr2-4; Kr11-7;



**Inhalt**

	Seite
1. Einführung und historische Anmerkungen - - - -	1
2. Konstruktion von Primzahlen in begrenzten Intervallen	- 3
3. Die Folge der Primzahlen $6m \pm 1$ und die Verwendung von pythagoreischen Tripeln zur Generierung von Primzahlen	- 11
4. Fakultäten zur Generierung von Primzahlen - - -	- 19
5. Ausgewählte Formeln zur Struktur der Primzahlen -	- 25
6. Die Folge der Primzahlen I beziehungsweise II - -	- 37
7. Primzahldifferenzen und Primzahlfolgen - - -	- 49
8. Primzahlpaare - - - - - - - -	- 71
Anhang:	
Programme zur Berechnung von Primzahlen beziehungsweise Faktorisierung von zusammengesetzten Zahlen - -	- 89
Literaturauswahl - - - - - - - -	- 99
Lehrgang der Mathematik- - - - - - -	-101
Studies in Number Theory- - - - - -	-111
Zusammenfassung einiger Anwendungen - - -	-113
Ergänzungen zu dem Text „Vira – Viruses – Viren“ des Verfassers (2020, Shaker Verlag, Düren) - - -	-133