Mathematik

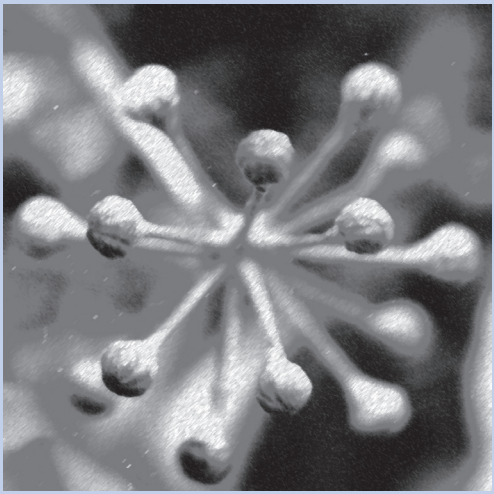
Ernst-Georg Haffner

Bachelor Mathematics
Mathematik verstehen

Ein Streifzug durch die Mathematik

Module: Basics und Lineare Algebra

3. überarbeitete Auflage



SHAKER
VERLAG

Bachelor Mathematics
Mathematik verstehen

Ein Streifzug durch die Mathematik

Module: Basics und Lineare Algebra

Ernst-Georg Haffner

Berichte aus der Mathematik

Ernst-Georg Haffner

Bachelor Mathematics • Mathematik verstehen

Ein Streifzug durch die Mathematik Module:
Basics und Lineare Algebra, 3. überarbeitete Auflage

Shaker Verlag
Düren 2020

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Copyright Shaker Verlag 2020
Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-7279-2
ISSN 0945-0882

Shaker Verlag GmbH • Am Langen Graben 15a • 52353 Düren
Telefon: 02421 / 99 0 11 - 0 • Telefax: 02421 / 99 0 11 - 9
Internet: www.shaker.de • E-Mail: info@shaker.de

Inhaltsverzeichnis

Vorwort **7**

Motivation **9**

I. Basics 11

1. Einführung in die Mathematik **13**
1.1. Mathematische Konzepte und Denkstrukturen . . . 13
1.1.1. Abstraktion . . . 13
1.1.2. Modellierung . . . 15
1.1.3. Aussagelogische Prinzipien . . . 16
1.1.4. Axiomatischer Ansatz . . . 20
1.2. Mathematische Bezeichnungen und Vorgehen . . . 22
1.2.1. Bezeichnungen . . . 22
1.2.2. Vorgehen . . . 23
1.2.3. Arbeiten mit Gleichungen . . . 23

2. Allgemeine Grundlagen **25**
2.1. Mengen . . . 25
2.1.1. Mengen allgemein . . . 25
2.1.2. Teilmengen . . . 28
2.1.3. Mengen von Mengen . . . 29
2.1.4. Mengenalgebra . . . 29
2.1.5. Kardinalität von Mengen . . . 32
2.2. Relationen und Funktionen . . . 32
2.2.1. Relationen . . . 32
2.2.2. Eigenschaften von Funktionen . . . 38
2.3. Körper . . . 40
2.3.1. Körpergesetze . . . 41
2.3.2. Die algebraische Struktur der Körper . . . 43
2.4. Aufbau der Zahlenmengen . . . 46
2.4.1. Natürliche Zahlen . . . 46
2.4.2. Ganze Zahlen . . . 51
2.4.3. Rationale Zahlen . . . 53
2.4.4. Reelle Zahlen . . . 55
2.4.5. Komplexe Zahlen . . . 56
2.5. Gleichungen . . . 59

2.5.1. Lineare Gleichungen . . . 59
2.5.2. Quadratische Gleichungen . . . 60
2.5.3. Ungleichungen . . . 63
2.6. Mathematische Beweise . . . 64
2.6.1. Direkter Beweis . . . 64
2.6.2. Indirekter Beweis . . . 66
2.6.3. Beweis durch Vollständige Induktion . . . 66
2.7. Binome und Polynome . . . 68
2.7.1. Binome . . . 68
2.7.2. Polynome . . . 71

II. Modul: Lineare Algebra 73

3. Vektoren 75
3.1. Einführung . . . 75
3.2. Vektor-Operationen . . . 76
3.3. Norm und Abstand . . . 80
3.4. Das Vektorprodukt . . . 82
3.5. Vektoren im $\mathbb{C}^n$ . . . 83
3.6. Physikalische Anwendungsbeispiele . . . 86
3.6.1. Arbeit und Kraft . . . 86
3.6.2. Drehmoment . . . 87

4. Analytische Geometrie 89
4.1. Geraden . . . 89
4.1.1. Einführung . . . 89
4.1.2. Abstand Punkt-Gerade . . . 91
4.1.3. Abstand zweier paralleler Geraden . . . 94
4.1.4. Abstand zweier windschiefer Geraden . . . 96
4.1.5. Schnittpunkt und Schnittwinkel zweier Geraden . . . 98
4.2. Ebenen . . . 99
4.2.1. Einführung . . . 99
4.2.2. Der Normalenvektor . . . 101
4.2.3. Abstand Punkt-Ebene . . . 102
4.2.4. Abstand Gerade-Ebene . . . 104
4.2.5. Schnittpunkt und Schnittwinkel einer Gerade und einer Ebene . . . 105
4.2.6. Abstand Ebene-Ebene . . . 107
4.2.7. Schnittgerade und Schnittwinkel zweier Ebenen . . . 108

5. Lineare Gleichungssysteme 111
5.1. Einführung . . . 111
5.2. Lineare Gleichungssysteme allgemein . . . 111
5.3. Der Gauß-Algorithmus . . . 112
5.4. Der Gauß–Jordan-Algorithmus . . . 118

6. Matrizen **123**
6.1. Einführung . . . 123
6.2. Matrizendarstellung . . . 123
6.3. Matrixaddition und Skalare Multiplikation . . . 124
6.4. Matrixmultiplikation . . . 126
6.5. Quadratische Matrizen . . . 130
6.6. Hermitesche Matrizen . . . 133
6.7. Determinanten . . . 134
6.8. Unterdeterminanten . . . 138
6.9. Lineare Gleichungen und Matrizen . . . 139
6.9.1. Determinanten zur Lösung linearer Gleichungen . . . 139
6.9.2. Inverse Matrizen zur Lösung linearer Gleichungen . . . 141
6.10. Der GJA zur Invertierung von Matrizen . . . 144

7. Vektorräume **147**
7.1. Einführung . . . 147
7.2. Vektorräume und Beispiele . . . 147
7.3. Unterräume . . . 150
7.4. Lineare Unabhängigkeit . . . 151
7.5. Erzeugte Unterräume . . . 152
7.6. Summen und Direkte Summen . . . 155
7.7. Basis . . . 157
7.8. Koordinaten . . . 160

8. Lineare Abbildungen **165**
8.1. Einführung und Definition . . . 165
8.2. Kern und Bild . . . 165
8.3. Singularität linearer Abbildungen . . . 166
8.4. Matrizen als lineare Abbildungen . . . 167
8.5. Operationen mit linearen Abbildungen . . . 168
8.6. Lineare Operatoren . . . 169
8.7. Matrixdarstellung linearer Operatoren . . . 172
8.8. Basiswechsel . . . 175
8.9. Lineare Operatoren und Determinanten . . . 177

9. Eigenwerte und Eigenvektoren **185**
9.1. Einführung und Definitionen . . . 185
9.2. Diagonalisierung . . . 189
9.3. Der Spektralsatz . . . 192
9.4. Satz von Cayley-Hamilton . . . 194
9.5. Geometrische Deutung von Eigenvektoren . . . 195
9.6. Eigenvektoren aus Eigenwerten . . . 198

10. Schlusswort **200**

Literaturempfehlungen **201**

A. Symbolverzeichnis **203**
A.1. Mathematische Symbole 203
A.2. Das griechische Alphabet 204

B. Stichwortverzeichnis **205**

Vorwort zur ersten Auflage

Man kann die Welt nicht verstehen, wenn man die Mathematik nicht versteht. Mathematische Modelle spielen in allen Anwendungsbereichen, sowohl auf technisch naturwissenschaftlichen wie auch auf geistes- oder sozialwissenschaftlichen, ja selbst auf medizinischen Gebieten eine nicht unerhebliche Rolle.
Das vorliegende Buch soll eine Einführung in das Verstehen der Mathematik selbst gewährleisten, ohne dabei allzu sehr auf die (naheliegenden) Anwendungsbezüge zu verweisen. Warum? Weil einerseits die Anwendung am Ende doch ablenkt von dem wesenhaft mathematischen Gebäude und andererseits das Verständnis des anwendungsspezifischen Zusammenhangs – vielleicht – den abstrakten Blick auf das mathematische Modell verstellt. Damit würde der eigene Horizont für die Zukunft nicht in dem Maße erweitert werden, wie es bei der (vorerst) solitären Beschäftigung mit mathematischen Kernfragen der Fall wäre.
Insofern ist das vorliegende Lehrbuch atypisch. Im Gegensatz zu den zahlreichen (und zum Teil vortrefflichen) mathematischen Lehrbüchern wird – speziell für die Studierenden von nichtmathematischen Fächern – gerade nicht so sehr die Mathematik als das notwendige Übel zum Erreichen der fachspezifischen Erkenntnisse dargestellt, sondern als ein Wert an sich, als etwas, mit dem es sich zu beschäftigen lohnt auch jenseits der individuell bekannten und spezifischen Bedürfnisse.
Allerdings wird dabei – im Unterschied zu Lehrbüchern für Hauptfach-Studierende der Mathematik – die "reine Lehre" der mathematischen Aussagen mit einer sehr starken Betonung auf den *Beweis* vermieden und damit gerade für den Bachelor-Studierenden eines nichtmathematischen Fachs die möglicherweise schwierigste Hürde für das Verständnis genommen.
Nichtsdestotrotz versteht sich dieses Buch nicht als Allheilmittel gegen mögliche Schwierigkeiten, die sich im Zusammenhang mit dem Studium mathematischer Konzepte und Modelle einstellen können. Vielmehr sollte es einen weiteren, zusätzlichen Ansporn darstellen, einen ungezwungenen, positiven und erfolgreichen Weg zum Verständnis der Mathematik einzuschlagen.

Übrigens wurde für dieses Lehrbuch auf die Angabe von Übungsaufgaben verzichtet. Anstatt dessen können Aufgaben des eTraining-Servers des Autors (über die Homepage auf der Website der Fachhochschule Trier http://www.fh-trier.de) verwendet werden.

Trier, im August 2007, *E.-G. Haffner*

Vorwort zur zweiten Auflage

Dank der sehr guten Resonanz durch die Studierendenschaft kann nunmehr eine zweite Ausgabe mit einigen Korrekturen und wesentlichen Ergänzungen vorgestellt werden. Mein besonderer Dank gilt Prof. Dr. Klaus Peter Koch für die wertvollen Hinweise zur Verbesserung des Buches!

Trier, im August 2007, *E.-G. Haffner*

Vorwort zur dritten Auflage

Ich freue mich, die nunmehr dritte Auflage des Buchs vorstellen zu können. StD Dr. Drewes hat weitere Korrekturen und einige Verbesserungen in Details vorgeschlagen, die ich gerne und mit herzlichem Dank angenommen habe.
Außerdem war 2019 im Hinblick auf die Lineare Algebra ein besonderes Jahr: Durch Zufall haben einige Physiker entdeckt, dass sich Eigenvektoren bestimmter Matrizen unmittelbar aus ihren Eigenwerten sowie den Eigenwerten der Untermatrizen berechnen lassen. Auch dieser Gedanke wurde diesem Buch neu hinzugefügt.
Viel Spaß bei der Lektüre!

Trier, im März 2020, *E.-G. Haffner*

Motivation

Im Sport gilt es als Binsenweisheit, dass nur intensives Training zusammen mit einem entschlossenen Willen zu angemessener Leistung führt. Möglicherweise erscheinen die folgenden Parallelen zwischen der Beschäftigung mit Mathematik und dem Ausüben eines körperlichen Sports überraschend; dennoch sind sie für den Studierenden insbesondere zu Beginn des Studiums sehr nützlich.
In beiden Fällen ist Anstrengung erforderlich. Ebenso ist das Erlernen gewisser Techniken von Nöten. Der persönliche Fortschritt kann gemessen werden und, was vielleicht das Wichtigste ist: Voraussetzung für den Erfolg ist ein gehöriges Maß an *Motivation* und durchaus auch *Freude* und *Spaß*, die sich in einem nicht zu vernachlässigenden Umfang einstellen sollten.
Dabei handelt es sich um einen Kreislauf: Je größer die Motivation, um so mehr Anstrengung kann geleistet werden. Diese wiederum führt zu zahlreichen Erfolgen – was die Motivation antreibt.

Vielleicht mag nun die Frage aufkommen, wie denn Mathematik und Spaß zu vereinbaren seien. Allerdings ist eine gewisse Lust daran, Rätsel zu lösen, schwierige Fragestellungen zu beantworten oder schlicht Problemstellungen zu "knacken" praktisch in allen Menschen veranlagt. Man muss sie nur wecken – oder in sich erst (neu) entdecken.
Was auf den ersten Blick abschreckend erscheint, ist das ungeheure Maß an Abstraktion, mit dem das mathematische Gebäude aufgestellt wird. Möglicherweise stören auch Formalismen, mit denen sowohl die einfachsten wie die schwierigsten Problemstellungen "verklausuliert" werden. Jedoch ist gerade dies eine der wichtigsten und wesentlichsten Gründe für den überwältigenden Erfolg mathematischer Ansätze über Jahrtausende der Menschheitsgeschichte: Das Schaffen einer universellen, fast eindeutigen Sprache, in der sich nahezu alle technischen und naturwissenschaftlichen Fragestellungen formulieren lassen.
Stellen Sie sich nur einmal vor, wie schwerfällig oder gar unmöglich logisches Schlussfolgern und mathematisches Strukturieren wäre, wenn statt einer formal eindeutig definierten (abstrakten) Sprache eine gewöhnliche menschliche Sprache herangezogen würde.
Und wie das Erlernen einer Fremdsprache eine gehörige Portion an Vokabular im Menschen aufbaut, so bedient sich auch die Mathematik einiger grundlegender Ansätze, die schlicht erlernt werden müssen.
Der Spaß und die Motivation werden jedoch schnell gesteigert werden können, wenn man bereit ist, diese mathematische Sprache zu erlernen und damit das Abenteuer eingeht, auch mathematisch strukturiert zu denken und an Problemstellungen analytisch heranzugehen.

Mathematische Zusammenhänge sind tatsächlich nicht schwer zu begreifen, wenn man sich die Mühe macht, die Voraussetzungen dieser Zusammenhänge auch zu verstehen, die selbst wiederum auf anderen Regeln oder Sätzen basieren. Demnach ist die Mathematik ein Gebäude, das man am besten von unten betreten sollte.
Genau dies werden wir tun, indem wir die komplette höhere Mathematik auf die Basis der Mengenlehre stellen. Hier haben alle Studierenden die Möglichkeit, mit einem Minimum an

Vorkenntnissen in die faszinierende Welt der Mathematik einzutauchen.
Natürlich werden wir auch sehr hochgelegene Stockwerke dieses Gebäudes betreten, und der Erkenntnisgewinn und die Faszination dieser *Räume* wird sich das komplette weitere Studium hindurch auszahlen – auch und besonders in den nicht-mathematischen Fächern. Darüber hinaus kann und wird das intensive Beschäftigen mit Begriffen wie der *Unendlichkeit* Horizonte öffnen, die den Blick weit über die fachspezifischen Lerninhalte hinaustragen.

Schließlich sollte nicht vergessen werden, dass gewisse Erkenntnisprozesse Zeit benötigen. Zeit, die unbedingt investiert werden muss und die letztlich die bedeutendsten Lernfortschritte ermöglicht.
Diese Zeit wird auch benötigt, um die teilweise aus schulischen Erfahrungen vorhandene Abneigung gegen die Mathematik abzubauen und die mögliche anfängliche Frustrationsschwelle schnell und endgültig zu überwinden.

Um das anfängliche Bild erneut aufzugreifen: die ersten Trainingseinheiten sind die schwersten, doch wer hier in angemessenem Umfang Zeit und Energie investiert, wird neben dem sich rasch einstellenden Spaßfaktor auch schnell bedeutsame Erfolge erzielen.
Und diese große Chance für ein erfolgreiches Studium liegt gerade vor Ihnen, hier und heute!