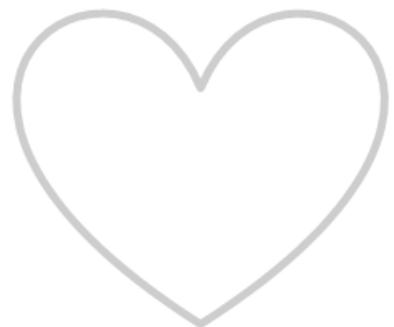


MATSE-MATIK

herausgegeben von
Prof. Dr. rer. nat. Christof Schelthoff
FH Aachen - Campus Jülich

Christof Schelthoff

Analysis 2



MATSE

SHAKER
VERLAG

Analysis

Prof. Dr. rer. nat. Christof Schelthoff
Fachhochschule Aachen - Campus Jülich

27. Juni 2018

MATSE-Matik

herausgegeben von
Prof. Dr. rer. nat. Christof Schelthoff
FH Aachen - Campus Jülich

Christof Schelthoff

Analysis 2

6. überarbeitete Auflage

Shaker Verlag
Aachen 2018

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Copyright Shaker Verlag 2018

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-6079-9

ISSN 2197-1420

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen

Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9

Internet: www.shaker.de • E-Mail: info@shaker.de

Inhaltsverzeichnis

I	Analysis 1	11
1	Grundlagen	13
1.1	Motivation	13
1.2	Grundlagen	14
1.2.1	Funktionen	14
1.2.2	Eigenschaften von Funktionen	15
1.2.3	Verkettete Funktionen	17
1.2.4	Reelle Funktionen	19
1.2.5	Eigenschaften reeller Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	20
1.2.6	Polynome	21
1.2.7	Gebrochen rationale Funktionen	26
1.2.8	Gleichungen und Ungleichungen	26
1.3	Komplexe Analysis	31
1.3.1	Rechenregeln für komplexe Zahlen in Polarkoordinaten	31
1.3.2	Eigenschaften von $z = e^{i\varphi}$	32
1.3.3	Radizieren (Wurzel ziehen) von komplexen Zahlen	32
1.3.4	Anwendung: Faktorisierung von Polynomen mit komplexen Koeffizienten	35
2	Folgen und Reihen	37
2.1	Grundlagen	37
2.1.1	Rekursionen	38
2.1.2	Differenzenrekursion	41
2.1.3	Zusammenfassung	42
2.1.4	Summen (Reihen)	43
2.1.5	Rechenregeln für Summen	43
2.1.6	Wichtige Summen	44
2.1.7	Rechnen mit Summen	48
2.2	Binomialkoeffizienten und der binomische Lehrsatz	50
2.2.1	Der Binomialkoeffizient	50
2.2.2	Der binomische Lehrsatz	55

3	Konvergenz von Folgen, Reihen und Funktionen	57
3.1	Grundlagen über Mengen und die Sätze von Bolzano-Weierstrass	57
3.2	Konvergenz von Folgen	64
3.2.1	Monotonie	64
3.2.2	Konvergenz und Grenzwert einer Folge	65
3.2.3	Rechnen mit konvergenten Folgen	72
3.2.4	Rechenregeln für Grenzwerte	74
3.2.5	Konvergenz monotoner Folgen	78
3.2.6	Die eulersche Zahl	79
3.2.7	Konvergenz rekursiver Folgen	82
3.2.8	Konvergenz komplexer Folgen	86
3.2.9	Cauchy-Konvergenz	86
3.2.10	Zusammenfassung Folgen	88
3.3	Unendliche Reihen	89
3.3.1	Die unendliche geometrische Reihe	92
3.3.2	Cauchy Reihen	93
3.3.3	Teleskopsummen und Teleskopprodukte	96
3.3.4	Konvergenzkriterien für fast immer nicht negative Reihen	99
3.3.5	Alternierende Reihen	109
3.3.6	Zusammenfassung Konvergenzkriterien	112
3.3.7	Umordnung von Reihen	113
3.3.8	Das Cauchy-Produkt	114
3.4	Potenzreihen	117
3.4.1	Spezielle Potenzreihen	123
3.4.2	Die eulersche Zahl und die exponentielle Funktion	124
3.5	Grenzwerte von Funktionen	132
3.5.1	Stetigkeit	132
3.5.2	Das $\varepsilon - \delta$ -Kriterium	134
3.5.3	Stetigkeit verketteter Funktionen	137
3.5.4	Weitere Stetigkeitsuntersuchungen	138
3.5.5	Stetigkeit der Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$	141
3.5.6	Unstetigkeit	147
3.5.7	Stetigkeit auf Intervallen	149
3.5.8	Lipschitz-Stetigkeit	151
3.5.9	Der Zwischenwertsatz	155
3.5.10	Der Fixpunktsatz	156
3.5.11	Eigenschaften der Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$	160
3.5.12	Die Logarithmusfunktion	166
3.5.13	Die hyperbolischen Funktionen	167
4	Differentialrechnung	171
4.1	Motivation	171
4.2	Verallgemeinerung	175
4.2.1	Einige Grenzwerte von Sin, Cos, Exp	177
4.2.2	Berechnung elementarer Ableitungen	180

4.3	Die Tangentengleichung	183
4.4	Ableitungsregeln	184
4.5	Lokale Extrema	192
4.6	Der Mittelwertsatz	193
4.7	Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Potenzreihen	196
4.8	Monotonie	200
4.9	Die Grenzwertsätze von de L'Hospital	203
4.10	Krümmungseigenschaften	207
4.11	MacLaurin- und Taylorreihenentwicklung	208
4.12	Die Taylorreihe	213
4.12.1	Konvergenz der Taylorreihe	214
4.12.2	Beispiele	214
4.12.3	Anwendung der Potenzreihen	215
4.12.4	(*) Konvergenzgeschwindigkeit von Taylorreihen	216
4.12.5	(*) Zusammenhang zwischen Taylorreihen und Extremwerten	218
4.13	(*) Numerische Berechnung von Ableitungen	220
4.14	(*) Das Tangentenverfahren von Newton	222
5	Integration	227
5.1	Einleitung	227
5.1.1	Das unbestimmte Integral	235
5.1.2	Das bestimmte Integral	236
5.1.3	(*) Die Flächenfunktion	237
5.1.4	Stammfunktion und Flächenfunktion	238
5.1.5	Die Stammfunktion von $1/x$	246
5.1.6	Partialbruchzerlegung	247
5.2	Flächenberechnungen	252
5.3	Fläche und Integral zwischen zwei Funktionen	253
5.4	Integration zur Berechnung von Flächen zwischen mehreren Funktionen	256
5.5	Die Mittelwertsätze der Integralrechnung	257
5.6	(*) Das Restglied der Taylorreihe	258
5.7	Längenberechnung	261
5.8	Mantelflächenberechnung	264
5.9	Rotationsvolumen	266
5.10	(*) Numerische Berechnung von Integralen	268
5.11	Differentiation von Integralen mit variablen Grenzen	271
5.12	Parameterintegrale	272
5.13	Uneigentliche Integrale	275
5.14	Unendliche Integrationsintervalle	276
5.15	Unbeschränkte Integranden auf endlichen Integrationsintervallen	278
5.16	Absolute Konvergenz	280
5.17	Weitere Konvergenzkriterien	282
5.17.1	Majoranten und Minorantenkriterium für unbeschränkte Integrationsintervalle	282

5.17.2 Majoranten und Minorantenkriterium für unbeschränkte Integranden	283
5.18 Das Integralkriterium zur Konvergenz von Reihen	287
6 (*) Beweise	295
II Übungen Analysis 1	305
7 Grundlagen	307
7.1 Mengen, Funktionen, Beweise	307
7.2 Komplexe Analysis	308
8 Folgen und Reihen	309
9 Konvergenz von Folgen, Reihen und Funktionen	315
9.1 Konvergenz von Folgen	315
9.2 Unendliche Reihen	317
9.3 Potenzreihen	319
9.4 Grenzwerte von Funktionen	320
10 Differentialrechnung	323
10.1 Die Taylorreihe	324
11 Integration	327
III Analysis 2	333
12 Funktionen mehrerer Veränderlicher	335
12.1 Grundbegriffe	335
12.2 Rechnen in Vektorräumen	335
12.3 Metrische Räume	336
12.4 Normen im \mathbb{R}^n	339
12.5 Das Skalarprodukt	342
12.6 Mengen im \mathbb{R}^n	349
12.6.1 Offene Mengen	349
12.6.2 Abgeschlossene Mengen	350
12.6.3 Beschränktheit und Ordnung	350
12.7 Folgen im \mathbb{R}^n	350
12.8 (*) Darstellungsformen der Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$	353
12.9 Differenzierbarkeit im \mathbb{R}^n	355
12.9.1 Grenzwerte im \mathbb{R}^n	355
12.9.2 Schnittfunktionen (Partielle Funktionen)	355
12.9.3 Partielle Ableitungen	356
12.9.4 Differentiation komplexer Zahlen	357
12.9.5 Stetigkeit	358

12.9.6	Gleichmäßige Stetigkeit und Lipschitz Stetigkeit	362
12.9.7	Fixpunkte im \mathbb{R}^n	363
12.9.8	Der Gradient	364
12.9.9	Die Tangentialebene	366
12.9.10	Die Richtungsableitung	368
12.10	Das vollständige Differential	373
12.10.1	Anwendung: Fehlerrechnung	374
12.10.2	Der relative Fehler	375
12.10.3	Parametrische Funktionen	376
12.10.4	Die Kettenregel	377
12.10.5	Kettenregel für Funktionen mit zwei Parametern	378
12.10.6	Anwendung: Implizite Differentiation	380
12.11	Partielle Ableitungen höherer Ordnung	382
12.11.1	Divergenz und Rotation	383
12.12	Die Taylorentwicklung für $f(x, y)$	386
12.12.1	Eindimensional	387
12.12.2	Zweidimensional	388
12.13	Relative Extremwerte ohne Nebenbedingungen	390
12.13.1	Der eindimensionale Fall	390
12.13.2	Lokale Extrema bei zwei Unbekannten	391
12.13.3	Schreibweise als Hesse-Matrix	397
12.13.4	Extremwerte im \mathbb{R}^n	399
12.13.5	Weitere Verfahren zur Analyse der Kandidaten	400
12.13.6 (*)	Beispiel 1: Nektar sammelnde Bienen	401
12.13.7 (*)	Beispiel 2: Zugvögel (ohne Happy End)	403
12.13.8	Anwendung der Extremwertberechnung: Regressionsanalyse	407
12.13.9	Approximation von Funktionen	412
12.14	Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen	413
12.14.1	Lagrange Multiplikatoren	414
12.15	Parametrische Funktionen und Kurvenintegrale	424
12.15.1	Der Tangentenvektor	424
12.15.2	Kurvenintegrale	425
12.15.3	Die Potentialfunktion	432
13	Mehrdimensionale Integration	437
13.1	Einleitung	437
13.2	Berechnung der Integrale	441
13.2.1	Berechnung von Integralen in kartesischen rechteckigen Koordinaten	442
13.2.2	Integration über kartesische krummlinige Bereiche	443
13.2.3	Weitere Anwendungen	445
13.2.4	Integration in Polarkoordinaten	448
13.2.5	Uneigentliche Integrale	455
13.3	Dreifachintegrale	458
13.3.1	Schwerpunktsberechnungen	459

14 (*) Wachstums- und Zerfallsprozesse	463
14.1 Grundlagen der Evolutionsgleichungen	463
14.1.1 Einleitung: Die Evolutionsgleichung	464
14.1.2 Diskret oder kontinuierlich ?	466
14.2 Ungebremstes Wachstum	467
14.2.1 Der diskrete Fall	467
14.2.2 Zeitteile	468
14.2.3 Grundsätzliches	469
14.2.4 Der Übergang zum kontinuierlichen Modell	471
14.2.5 Zusammenhang zwischen $k_{diskret}$ und k_{kont}	473
14.3 Gebremstes Wachstum - Störung erster Ordnung	475
14.4 Das logistische Wachstum - Störungen zweiter Ordnung	482
14.5 Systeme von Differenzgleichungen	487
14.6 Zusammenfassung Wachstum und Zerfall	489
15 Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGL)	491
15.1 Einleitung	491
15.1.1 Einführende Beispiele (s. Wachstum und Zerfall)	492
15.1.2 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen	498
15.2 Lösungsverfahren für DGL'en erster Ordnung	500
15.2.1 Geometrische Interpretation von $y'=f(x,y)$	501
15.2.2 Substitution	504
15.2.3 Lineare DGL'en	508
15.2.4 Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten	512
15.2.5 Die Bernoulli-Differentialgleichung	516
15.2.6 Zusammenfassung der Lösungsverfahren für DGL 1. Ordnung	518
15.2.7 Weitere linear inhomogene DGL'en mit nicht-konstanten Koeffizienten	521
15.2.8 Potenzreihenansätze	522
15.2.9 Exakte Differentialgleichungen	524
15.3 Numerische Lösung einer expliziten DGL 1. Ordnung	531
15.4 Lineare DGL'en 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten	534
15.4.1 Lineare Differentialgleichungssysteme	540
15.5 (*) Anwendung: Die harmonische Schwingung	545
15.6 Wachstumsprozesse mit Hilfe der Differentialgleichungen	550
15.6.1 Differentialgleichungen für Störungen zweiter Ordnung	552
IV Übungen Analysis 2	555
16 Funktionen mehrerer Veränderlicher	557
16.1 Metrische Räume	557
16.2 Normen im \mathbb{R}^n	557
16.3 Folgen im \mathbb{R}^n	558

16.4 Differenzierbarkeit im \mathbb{R}^n	558
16.5 Das vollständige Differential	559
16.6 Partielle Ableitungen höherer Ordnung	560
16.7 Die Taylorentwicklung für $f(x, y)$	560
16.8 Relative Extremwerte ohne Nebenbedingungen	561
16.9 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen	562
16.10 Parametrische Funktionen und Kurvenintegrale	562
17 Mehrdimensionale Integration	563
17.1 Berechnung der Integrale	563
18 Wachstums- und Zerfallsprozesse	565
19 Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGL)	567
19.1 Lösungsverfahren für DGL'en erster Ordnung	567
19.2 Lineare DGL'en 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten	569
19.3 DGL der Emotionen	569