Diffusionsgetriebene Keimbildung an Porenkeimen in kavitierenden Strömungen

Tim Florian Groß

Band 17

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Forschungsberichte zur Fluidsystemtechnik

Herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. Peter F. Pelz

Diffusionsgetriebene Keimbildung an Porenkeimen in kavitierenden Strömungen

Vom Fachbereich Maschinenbau
an der Technischen Universität Darmstadt
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktor-Ingenieurs
(Dr.-Ing.)

genehmigte

DISSERTATION

vorgelegt von

Tim Florian Groß, M. Sc.

aus Herne

Berichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. Peter F. Pelz
Mitberichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. Peter Stephan
Tag der Einreichung:	09.10.2017
Tag der mündlichen Prüfung:	13.12.2017

Darmstadt 2017

D 17

Forschungsberichte zur Fluidsystemtechnik

Band 17

Tim Florian Groß

Diffusionsgetriebene Keimbildung an Porenkeimen in kavitierenden Strömungen

D 17 (Diss. TU Darmstadt)

Shaker Verlag
Aachen 2018

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Zugl.: Darmstadt, Techn. Univ., Diss., 2017

Copyright Shaker Verlag 2018
Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-5729-4
ISSN 2194-9565

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen
Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9
Internet: www.shaker.de • E-Mail: info@shaker.de

Vorwort des Herausgebers

Kontext

Im Journal of Fluid Mechanics sind heute 163 Artikel unter dem Schlüsselwort „Cavitation“ zu finden, sprich die Kavitationsforschung ist ein sehr lebendiger und wichtiger Teil der Strömungsmechanik. Das Interesse an dieser Mehrphasenströmung erwächst aus der hohen gesellschaftlichen und ökonomischen Relevanz. Auf der einen Seite ist modernes Leben ohne Transport von Flüssigkeiten bzw. Nutzen von Flüssigkeiten für die Energieübertragung (thermisch oder mechanisch) nicht denkbar. Die ökonomisch wichtigen Systemkomponenten sind Turbine, Hydromotor, Pumpe, Propeller, Einspritzdüse, Ventil, Filter, Speicher, Wärmetauscher. Auf der anderen Seite wird das Verständnis von Kavitationsvorgängen in der Medizin- und Reinigungstechnik zunehmend wichtig.

Die Forschungsaktivität ist Ausdruck dafür, dass bis heute Verständnislücken und auch falsches Verständnis bestehen. Auf letzteres komme ich gleich zu sprechen. Die Kavitationsforschung teilt sich bis heute in die drei Teile (i) Nukleationstheorien, (ii) Blasendynamik und (iii) Wolkendynamik auf. Für die oben genannten Komponenten ist insbesondere die rechnerische Vorhersage des Verhaltens von Kavitationswolken wichtig. In kommerziellen und Open-Source CFD-Solvern findet bis heute ein empirisch-dynamisches Wolkenmodell Anwendung, dass ich heute noch kritischer als vor einiger Zeit als pseudophysikalisch bezeichne.

Die Modellparameter „Verdampfungsrate“ und „Kondensationsrate“ in CFX, Fluent und OpenFOAM suggerieren dem Anwender ein axiomatisches Modell, welches tatsächlich wenig mit dem eigentlichen physikalischen Geschehen der Kavitation gemein hat. Hier gilt das schöne Zitat von George Box: *„Essentially, all models are wrong, but some are usefull“*. Wenn jedoch das Modell unkritisch als physikalische Wirklichkeit gesehen wird, dann ist dies gefährlich.

Die genannte Forschung zu Nukleationstheorien spielte in der technischen Anwendung und Diskussion bisher keine Rolle. Allein die Themen „Wasserqualität“ und „Gehalt an freien Keimen im Wasser“ sind seit ca. 50 Jahren Forschungsgegenstand. Die Forschung zum Gehalt an freien Keimen wurde durch einen großen Ringversuch im Jahr 1966 getriggert: In weltweit allen großen Kavitationskanälen wurde anfängliche Kavitation an einem Widerstandskörper bestimmt. Die Unterschiede in der Kavitationszahl waren

erschreckend groß. Folgender Seitenhieb sei hier erlaubt: Der heute als architektonisches Baudenkmal geltende Kavitationskanal der TU Berlin in der Nähe des Bahnhofs Zoo hat bis heute leider nie richtig funktioniert. Ein Schelm, der an den Berliner Flughafen denkt.

Der Name „Nukleationstheorien“ suggeriert konkurrierende, gar widersprüchliche oder spekulative Theorien. In der Tat ist dies der Fall (Herr Groß gibt einen Überblick in Abbildung 2.3). Die Arbeit von Herrn Groß liefert einen nicht zu unterschätzenden Beitrag, um notwendiges Licht in diesen wichtigen Teil der Kavitationsforschung zu bringen.

Dabei stehe ich mit meiner Einschätzung nicht allein: Ein Gutachter des Journal of Fluid Mechanics bewertet die sehr prominent publizierten Forschungsergebnisse von Herrn Groß wie folgt: *„This topic is of great interest in cavitation studies since these microbubbles may act as cavitation nuclei. [. . .] This paper appeared to me as a reference paper on nucleation from surface nuclei. [. . .] The assumptions are clearly stated and the authors are fully aware of the various phenomena that may alter their simplified theory. [. . .] In conclusion, the authors have to be congratulated for this interesting contribution to the understanding of the physics of bubble nucleation from surface nuclei in cavitation conditions.“* Auf welcher Basis dieses Urteil gefällt ist, wird im Folgenden deutlich gemacht.

Von der Forschungsfrage zu einem neuen validierten Verständnis zur Nukleation bei hydrodynamischer Kavitation

Getrieben durch die technische Relevanz haben wir uns an der TU Darmstadt in abgeschlossenen Vorgängerprojekten mit zwei Fragen beschäftigt: erstens mit der Entstehung und Dynamik von Kavitationsschichten und zweitens mit der Dynamik von torusförmigen Kavitationswolken. Herr Dr.-Ing. Thomas Keil vermutete, dass an der stromaufliegenden Basis der Kavitationsschicht ein Nukleationsvorgang mit einer Frequenz in der Größenordnung von mehreren Kilohertz stattfinden muss. Das axiomatische Modell von Keil ist empirisch validiert und sowohl die Nukleationsfrequenz als auch die Nukleationskeimgröße sind an die makroskopische Beobachtung angepasst (vgl. Pelz, Keil & Groß: „The transition from sheet to cloud cavitation; J. Fluid Mech. (2017), vol. 817, pp. 439-454,). Herr Groß übernahm das Staffelholz von Herrn Keil. Gemeinsam entstand die in Abbildung 6.1 gezeigte sehr schöne Messung im Kavitationskanal der EPF Lausanne. Am linken Bildrand ist ein Porenkeim zu vermuten, aus dem in einem selbsterregten zyklischen Vorgang Nukleations-

keime entstehen. Durch dynamische Druckabsenkung entlang der Keimbahn wächst die Blase solange bis der kritische Blake'sche Radius erreicht wird. Erst dann beginnt der eigentliche Kavitationsvorgang, der auch im Bild sichtbar ist.

Der hier beschriebene Vorgang war vor der Arbeit von Herrn Groß in der Kavitationsforschung unbekannt. Dies erstaunt, da in der Retrospektive der von Herrn Groß beschriebene Nukleationsvorgang vollkommen klar erscheint. Aus der neueren und plausiblen Modellvorstellung, die insbesondere experimentell validiert ist, begründet sich das positive Urteil des Gutachters.

Es herrschte immer das Vorurteil, dass Stofftransport infolge Diffusion keine Rolle spielen kann, da die Zeitskala des Stofftransports zu groß sei, um Nukleation zu ermöglichen (vgl. Atchley & Prosperetti: „The crevice model of bubble nucleation"; J. Acoust. Soc. Am. 86/3 (1989), pp. 1065-1084). Dies ist bei ruhender Flüssigkeit zutreffend, nicht aber für bewegte Flüssigkeiten. Eine ruhende Flüssigkeit mag im akademischen Umfeld schön sein, in technischen Anwendungen ist dieser Fall jedoch exotisch. Indem man sich auf Prosperetti berief, wurde die Diffusionsgrenzschicht am Porenkeim völlig falsch eingeschätzt. Abbildung 2.3 zeigt die spekulativen Keimbildungstheorien I bis III und das neue, validierte Modell von Herrn Groß.

Wie können die Ergebnisse genutzt werden?

Mit dem neuen Keimbildungsmodell wird hydrodynamische Kavitation auf ein axiomatisches Fundament gestellt, und zwar in mehrfacher Hinsicht: Die Keimrate ist das fehlende Element, um die Kavitationsschichten und nachfolgend Kavitationswolken zu verstehen. In der Ölhydraulik kann erstmals der Schritt von empirischen Ausgasungsmodellen zu axiomatisch begründeten Modellen gegangen werden. Neben diesen beiden Beispielen gibt es viele mehr.

Darmstadt, im Dezember 2017
Peter Pelz

Vorwort des Autors

Diese Dissertation entstand auf Basis der Forschungsergebnisse, die ich während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Fluidsystemtechnik der Technischen Universität Darmstadt erarbeitet habe. Auf diesem Wege möchte ich allen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, meinen Dank aussprechen.

Insbesondere danke ich meinem Doktorvater Prof. Dr.-Ing. Peter F. Pelz für die erfolgreichen vergangenen fünf Jahren. In Erinnerung bleiben mir eine vertrauensvolle und konstruktive Zusammenarbeit und die Möglichkeit, auch abseits des eigenen Themas forschen zu können. Eine gute Balance aus Freiheiten und Führung ist sehr viel wert. Des Weiteren bedanke ich mich bei Prof. Dr.-Ing. Peter Stephan für die Übernahme des Korreferats und den freundlichen Kontakt. Ich würde mich freuen, wenn meine Arbeit Ausgangspunkt für zukünftige Forschungskooperationen der Fachgebiete wäre.

Ein weiterer Dank gilt Prof. Dr.-Ing. Franz Peters, der mich im dritten Semester meines Studiums als studentische Hilfskraft einstellte und seitdem meine fachliche, aber auch persönliche Entwicklung begleitete. Da die ursprüngliche Idee für die Keimbildungsexperimente auf ihn zurück geht, hat er einen großen Anteil am Gelingen dieser Arbeit.

Außerdem möchte ich mich bei meinen ehemaligen Kolleginnen und Kollegen bedanken, die immer für fachliche Diskussionen, aber auch für die notwendige Zerstreuung neben der Forschungsarbeit bereit standen. Zudem danke ich den Studenten, die mit Interesse und Engagement das Forschungsthema vorangetrieben haben.

Den Herren Dr.-Ing. Manuel Metzler, Dr.-Ing. Benjamin Siegl, Sebastian Lang und Bartholomäus Luczak danke ich für die kritische Durchsicht dieser Arbeit und die wichtigen Anmerkungen und Hinweise.

Der letzte und wichtigste Dank gilt meiner Familie, meiner Freundin Valerie und meinen engsten Freunden für die moralische Unterstützung in den vergangenen Jahren. Gewidmet ist diese Arbeit meinen lieben Großeltern.

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit, abgesehen von den in ihr ausdrücklich genannten Hilfen, selbstständig verfasst habe.

Darmstadt, im Oktober 2017
Tim Florian Groß

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Keime und Keimbildung **7**
2.1 Keime in kavitierenden Strömungen 7
2.2 Kavitationskeime in Modellierung und Simulation 11
2.3 Diskussion etablierter Keim- und Keimbildungstheorien 15
2.4 Stand der Forschung: Stofftransport an Porenkeimen 22

3 Diffusionsgetriebene Keimbildung als zyklischer Prozess **27**
3.1 Wachstumsphase des Porenkeims 31
3.2 Ablösung freier Gasblasen 36
3.3 Keimbildungsmodell 40
3.4 Aktivität und mechanische Stabilität von Porenkeimen 42
3.5 Zusammenfassung wichtiger Erkenntnisse 50

4 Experimenteller Aufbau und Auswertung **53**
4.1 Versuchsaufbau 54
4.2 Versuchsdurchführung 57
4.3 Bildauswertung 60
4.4 Messunsicherheiten und Fehlerrechnung 64

5 Experimentelle Ergebnisse und Modellvalidierung **69**
5.1 Messergebnisse 70
5.2 Validierung des Keimbildungsmodells 77
5.3 Blasenablösung als Folge einer Plateau-Rayleigh-Instabilität . 80

6 Anwendung auf technische Strömungen **87**
6.1 Streifenkavitation 87
6.2 Euler-Lagrange-Simulation einer Schichtkavitation 90
6.3 Ausgasung in Mikroblende 91

Zusammenfassung und Ausblick **97**

Literatur **101**

Anhang **109**
A.1 Übersicht über verwendete Messgeräte 109
A.2 Vorschrift zur Berechnung von Messunsicherheiten 110

Symbolverzeichnis

Die Symbole der ersten Spalte werden in der zweiten Spalte beschrieben. Die dritte Spalte, wenn vorhanden, gibt die Dimension als Monom mit den Basisgrößen Länge (L), Masse (M), Zeit (T) , Temperatur (Θ) und Stoffmenge (N) an.

Lateinische Symbole

Symbol	Beschreibung	Dimension
A	Oberfläche der Phasengrenzfläche des Porenkeims	L^2
a	Höhe eines Porenkeims als Kugelsegment	L
b	charakteristische Länge der dynamischen Kraft	L
b_P	Tiefe einer zylindrischen Pore	L
B	Tiefe im ebenen Problem	L
c	Gaskonzentration	$\mathrm{L}^{-3}\,\mathrm{N}$
c_S	Sättigungskonzentration	$\mathrm{L}^{-3}\,\mathrm{N}$
c_+	dimensionslose Gaskonzentration	
c_∞	Gaskonzentration in der Flüssigkeit	$\mathrm{L}^{-3}\,\mathrm{N}$
$c_{\infty,\mathrm{S}}$	Sättigungskonzentration in der Flüssigkeit	$\mathrm{L}^{-3}\,\mathrm{N}$
$c_{\mathrm{B,S}}$	Sättigungskonzentration an einer Gasblase	$\mathrm{L}^{-3}\,\mathrm{N}$
$c_{\mathrm{N,S}}$	Sättigungskonzentration an einem Porenkeim	$\mathrm{L}^{-3}\,\mathrm{N}$
D	Durchmesser Mikroblende	L
$\mathcal{D}$	Diffusionskoeffizient	$\mathrm{L}^2\,\mathrm{T}^{-1}$
d	Porendurchmesser	L
d^*	notwendiger Porendurchmesser	L
d_B	Blasendurchmesser	L
d_cyl	Durchmesser eines zylindrischen Porenkeims	L
d_CF	relevante Länge der Kapillarkraft	L
d_N	Porendurchmesser im ebenen Problem	L
$d_{\mathrm{N}+}$	dimensionsloser Porendurchmesser im ebenen Problem	
f	Keimbildungsfrequenz	T^{-1}
f_cam	Bildaufnahmefrequenz der Highspeed-Kamera	T^{-1}
$\mathcal{H}$	Henry-Koeffizient	$\mathrm{L}^{-2}\,\mathrm{M}^{-1}\,\mathrm{T}^2\,\mathrm{N}$
J	volumenspezifische Keimbildungsrate	$\mathrm{L}^{-3}\,\mathrm{T}^{-1}$
J_0	Proportionalitätsfaktor der volumenspezifischen Keimbildungsrate	$\mathrm{L}^{-3}\,\mathrm{T}^{-1}$
k	Boltzmann-Konstante	$\mathrm{L}^2\,\mathrm{M}\,\mathrm{T}^{-2}\,\Theta^{-1}$

Symbol	Beschreibung	Dimension
k_{P}	charakteristische Länge der mikroskopischen Geometrie der Porenkante	L
L	Spalthöhe, charakteristische Länge der Strömungsgeometrie	L
l	Länge Mikroblende	L
l_ν	viskose Länge	L
M	Molmasse	$\mathrm{M\,N^{-1}}$
m	Porenkeimmasse (nicht-kondensierbares Gas)	M
m_{crit}	kritische Porenkeimmasse	M
m_{B}	Blasenmasse (nicht-kondensierbares Gas)	M
$m_{\mathrm{B},0}$	Blasenmasse vor Druckabsenkung	M
N	Anzahl Blasenablösungen	
N_x, N_y	Messwertanzahl	
n	Stoffmenge	N
$\vec{n}$	Normalenvektor	
$\dot{m}$	Diffusionsmassenstrom	$\mathrm{M\,T^{-1}}$
$\dot{m}_{\infty,\mathrm{S}}$	Massenstrom des in der Flüssigkeit gelösten Gases	$\mathrm{M\,T^{-1}}$
p	Druck	$\mathrm{L^{-1}\,M\,T^{-2}}$
p_∞	Flüssigkeitsdruck	$\mathrm{L^{-1}\,M\,T^{-2}}$
$p_{\infty,0}$	Flüssigkeitsdruck vor Druckabsenkung	$\mathrm{L^{-1}\,M\,T^{-2}}$
$p_{\infty,\mathrm{crit}}$	kritischer Flüssigkeitsdruck (Blake'scher Druck)	$\mathrm{L^{-1}\,M\,T^{-2}}$
p_1	Druck in Tank 1, Druck vor Mikroblende	$\mathrm{L^{-1}\,M\,T^{-2}}$
p_2	Druck in Tank 2, Druck in Mikroblende	$\mathrm{L^{-1}\,M\,T^{-2}}$
p_3	Druck hinter Mikroblende	$\mathrm{L^{-1}\,M\,T^{-2}}$
$p_{1,\mathrm{S}}$	Sättigungsdruck in Tank 1	$\mathrm{L^{-1}\,M\,T^{-2}}$
p_{B}	Druck des nicht-kondensierbaren Gases in einer Gasblase	$\mathrm{L^{-1}\,M\,T^{-2}}$
$p_{\mathrm{B},0}$	Druck des nicht-kondensierbaren Gases in einer Gasblase vor Druckabsenkung	$\mathrm{L^{-1}\,M\,T^{-2}}$
p_{N}	Druck des nicht-kondensierbaren Gases in einem Porenkeim	$\mathrm{L^{-1}\,M\,T^{-2}}$
$p_{\mathrm{N},0}$	Druck des nicht-kondensierbaren Gases in einem Porenkeim vor Druckabsenkung	$\mathrm{L^{-1}\,M\,T^{-2}}$
$p_{\mathrm{N,crit}}$	kritischer Porenkeimdruck	$\mathrm{L^{-1}\,M\,T^{-2}}$
p_{S}	Sättigungsdruck	$\mathrm{L^{-1}\,M\,T^{-2}}$
p_{v}	Dampfdruck der Flüssigkeit	$\mathrm{L^{-1}\,M\,T^{-2}}$
Q	Volumenstrom	$\mathrm{L^3\,T^{-1}}$
R	Krümmungsradius der Phasengrenzfläche eines Porenkeims	L

Symbol	Beschreibung	Dimension
R_0	Krümmungsradius der Phasengrenzfläche eines Porenkeims vor Druckabsenkung	L
R_{crit}	kritischer Krümmungsradius der Phasengrenzfläche eines Porenkeims	L
R_{min}	minimaler Krümmungsradius der Phasengrenzfläche eines Porenkeims	L
R_{V}	volumenäquivalenter Kugelradius eines Porenkeims	L
R_{B}	Blasenradius	L
$R_{\mathrm{B},0}$	Blasenradius vor Druckabsenkung	L
$R_{\mathrm{B,crit}}$	kritischer Blasenradius (Blake'scher Radius)	L
$\mathcal{R}$	allgemeine Gaskonstante	$\mathrm{L^2MT^{-2}\Theta^{-1}N^{-1}}$
$\mathcal{R}_{\mathrm{s}}$	spezifische Gaskonstante	$\mathrm{L^2\,T^{-2}\,\Theta^{-1}}$
S	Grenzflächenspannung	$\mathrm{M\,T^{-2}}$
$s(x)$	Standardabweichung der Messgröße x in der Einheit von x	
T	Temperatur	Θ
T_{B}	Temperatur in einer Gasblase	Θ
t	Zeit	T
t_{F}	t-Faktor der Student'schen Verteilung	
U	charakteristische Strömungsgeschwindigkeit an einem Porenkeim	$\mathrm{L\,T^{-1}}$
U_∞	Strömungsgeschwindigkeit eines homogenen Geschwindigkeitsfeldes	$\mathrm{L\,T^{-1}}$
$\vec{u}$	Geschwindigkeitsfeld	$\mathrm{L\,T^{-1}}$
V	Porenkeimvolumen, Volumen	$\mathrm{L^3}$
V_0	Porenkeimvolumen vor Druckabsenkung	$\mathrm{L^3}$
V_{m}	molares Volumen	$\mathrm{L^3\,N^{-1}}$
V_{B}	Blasenvolumen	$\mathrm{L^3}$
V_{P}	Porenvolumen	$\mathrm{L^3}$
W	Energiebarriere für homogene Keimbildung	$\mathrm{L^2\,M\,T^{-2}}$
w	Kanalbreite	L
x	kartesische Koordinate	L
x_+	kartesische Koordinate (dimensionslos)	
y	kartesische Koordinate	L
y_{Sl}	Schlupflänge	L
y_+	kartesische Koordinate (dimensionslos)	

Griechische Symbole

Symbol	Beschreibung	Dimension
Γ	Euler'sche Gammafunktion	
$\dot{\gamma}$	Scherrate an der Wand	T^{-1}
δ	dimensionsloser Blasendurchmesser	
δ_{ges}	dimensionsloser Blasendurchmesser bei Berücksichtigung der Porentiefe	
δ_c	Dicke der Konzentrationsgrenzschicht	L
$\delta_{c,\max}$	maximale Dicke der Konzentrationsgrenzschicht	L
δ_U	Dicke der Strömungsgrenzschicht	L
$(\delta x)_{\mathrm{sys}}$	systematischer Messfehler der Messgröße x in der Einheit von x	
$(\delta x)_{\mathrm{stat}}$	statistischer Messfehler der Messgröße x in der Einheit von x	
Δt	Zeitabstand zwischen zwei Blasenablösungen	T
ϵ_{I}, ϵ_{I}, ϵ_{III}	dimensionslose Konstanten (Blasenablösung)	
ζ	Übersättigung der Flüssigkeit an einem Porenkeim	
ζ_{crit}	kritische Übersättigung der Flüssigkeit an einem Porenkeim	
ζ_∞	Übersättigung der Flüssigkeit	
ζ_∞^*	notwendige Übersättigung der Flüssigkeit	
η	Ähnlichkeitsvariable	
θ	Kontaktwinkel Gasphase/Flüssigkeit/Festkörper	
Λ	dimensionslose Löslichkeit	
μ	Transformationsvariable	
ν	kinematische Viskosität	$\mathrm{L}^2\,\mathrm{T}^{-1}$
ξ	Massenstromverhältnis	
ϱ	Flüssigkeitsdichte	$\mathrm{L}^{-3}\,\mathrm{M}$
τ	Rayleigh-Kollapszeit	T
τ_{w}	Wandschubspannung	$\mathrm{L}^{-1}\,\mathrm{M}\,\mathrm{T}^{-2}$
φ	Volumenanteil des freien Gases in einer Flüssigkeit	

Indices

Symbol	Beschreibung	Symbol	Beschreibung
B	Gasblase	c	Konzentration
CF	Kapillarkraft	cyl	zylindrischer Porenkeim
L	Spalthöhe	N	Porenkeim
P	Pore	S	Sättigungszustand
Sl	Schlupf	s	spezifisch
U	Strömungsgeschwindigkeit	v	Dampf
V	volumenäquivalent	w	Wand
x	x-Koordinate	ν	kinematische Viskosität
crit	kritische Größe	min	minimal
ges	gesamt	∞	umgebende Flüssigkeit
0	initialer Zustand	1	Zustand 1, Tank 1
2	Zustand 2, Tank 2	$+$	dimensionslos

Dimensionslose Kennzahlen

Symbol	Beschreibung
$Bo := \varrho\, g\, d^2/S$	Bond-Zahl
$Gb := W/k\,T$	Gibbs-Zahl
$Pe := \dot{\gamma}\, d^2/\mathcal{D}$	Péclet-Zahl mit Scherrate an der Wand
$Pe' := U_\infty\, d/\mathcal{D}$	Péclet-Zahl mit Strömungsgeschwindigkeit
$Re_x := U_\infty\, x/\nu$	Reynolds-Zahl d. Plattenströmung mit Lauflänge x
$Re_L := \dot{\gamma}\, L^2/(6\,\nu)$	Reynolds-Zahl d. Rechteck-Kanalströmung
$Sc := \nu/\mathcal{D}$	Schmidt-Zahl
$Sh := \dot{m}/(c_{\mathrm{N,S}}\, \zeta\, M\, \mathcal{D}\, d)$	Sherwood-Zahl
$Sr := f d^2/\mathcal{D}$	Strouhal-Zahl
$We := \rho\, \dot{\gamma}^2\, d^3/S$	Weber-Zahl

Mathematische Operatoren

Symbol	**Beschreibung**
∇	Nabla-Operator, Differentialoperator der Feldtheorie
$\frac{\partial}{\partial t}$	partielle Zeitableitung
$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$	partielle Ortsableitungen
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$	allgemeine Zeitableitung
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}$	allgemeine Ableitung nach η
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}$	allgemeine Ableitung nach R