

# Analysis

Prof. Dr. rer. nat. Christof Schelthoff  
Fachhochschule Aachen - Campus Jülich

18. Mai 2017



# **MATSE-Matik**

herausgegeben von  
Prof. Dr. rer. nat. Christof Schelthoff  
FH Aachen - Campus Jülich

**Christof Schelthoff**

## **Analysis 2**

5. überarbeitete Auflage

Shaker Verlag  
Aachen 2017

**Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Copyright Shaker Verlag 2017

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-5327-2

ISSN 2197-1420

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen

Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9

Internet: [www.shaker.de](http://www.shaker.de) • E-Mail: [info@shaker.de](mailto:info@shaker.de)

# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Analysis 1</b>	<b>11</b>
<b>1</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>13</b>
1.1	Motivation . . . . .	13
1.2	Grundlagen . . . . .	14
1.2.1	Funktionen . . . . .	14
1.2.2	Eigenschaften von Funktionen . . . . .	15
1.2.3	Verkettete Funktionen . . . . .	17
1.2.4	Reelle Funktionen . . . . .	19
1.2.5	Eigenschaften reeller Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . . . . .	20
1.2.6	Polynome . . . . .	21
1.2.7	Gebrochen rationale Funktionen . . . . .	26
1.2.8	Gleichungen und Ungleichungen . . . . .	26
1.3	Komplexe Analysis . . . . .	31
1.3.1	Rechenregeln für komplexe Zahlen in Polarkoordinaten . . . . .	31
1.3.2	Eigenschaften von $z = e^{i\varphi}$ . . . . .	32
1.3.3	Radizieren (Wurzel ziehen) von komplexen Zahlen . . . . .	32
1.3.4	Anwendung: Faktorisierung von Polynomen mit komplexen Koeffizienten . . . . .	35
<b>2</b>	<b>Folgen und Reihen</b>	<b>37</b>
2.0.5	Rekursionen . . . . .	38
2.0.6	Differenzenrekursion . . . . .	41
2.0.7	Zusammenfassung . . . . .	42
2.0.8	Summen (Reihen) . . . . .	43
2.0.9	Rechenregeln für Summen . . . . .	43
2.0.10	Wichtige Summen . . . . .	44
2.0.11	Rechnen mit Summen . . . . .	48
2.1	Binomialkoeffizienten und der binomische Lehrsatz . . . . .	50
2.1.1	Der Binomialkoeffizient . . . . .	50
2.1.2	Der binomische Lehrsatz . . . . .	55
<b>3</b>	<b>Konvergenz von Folgen, Reihen und Funktionen</b>	<b>57</b>
3.1	Grundlagen über Mengen und die Sätze von Bolzano-Weierstrass	57

3.2	Konvergenz von Folgen . . . . .	64
3.2.1	Monotonie . . . . .	64
3.2.2	Konvergenz und Grenzwert einer Folge . . . . .	65
3.2.3	Rechnen mit konvergenten Folgen . . . . .	72
3.2.4	Rechenregeln für Grenzwerte . . . . .	74
3.2.5	Konvergenz monotoner Folgen . . . . .	78
3.2.6	Die eulersche Zahl . . . . .	79
3.2.7	Konvergenz rekursiver Folgen . . . . .	82
3.2.8	Konvergenz komplexer Folgen . . . . .	86
3.2.9	Cauchy-Konvergenz . . . . .	86
3.2.10	Zusammenfassung Folgen . . . . .	88
3.3	Unendliche Reihen . . . . .	89
3.3.1	Die unendliche geometrische Reihe . . . . .	91
3.3.2	Cauchy Reihen . . . . .	93
3.3.3	Teleskopsummen und Teleskopprodukte . . . . .	96
3.3.4	Konvergenzkriterien für fast immer nicht negative Reihen . . . . .	99
3.3.5	Alternierende Reihen . . . . .	108
3.3.6	Zusammenfassung Konvergenzkriterien . . . . .	111
3.3.7	Umordnung von Reihen . . . . .	112
3.3.8	Das Cauchy-Produkt . . . . .	113
3.4	Potenzreihen . . . . .	115
3.4.1	Spezielle Potenzreihen . . . . .	121
3.4.2	Die eulersche Zahl und die exponentielle Funktion . . . . .	122
3.5	Grenzwerte von Funktionen . . . . .	130
3.5.1	Stetigkeit . . . . .	130
3.5.2	Das $\varepsilon - \delta$ -Kriterium . . . . .	132
3.5.3	Stetigkeit verketteter Funktionen . . . . .	135
3.5.4	Weitere Stetigkeitsuntersuchungen . . . . .	136
3.5.5	Stetigkeit der Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ . . . . .	139
3.5.6	Unstetigkeit . . . . .	143
3.5.7	Stetigkeit auf Intervallen . . . . .	146
3.5.8	Lipschitz-Stetigkeit . . . . .	148
3.5.9	Der Zwischenwertsatz . . . . .	151
3.5.10	Der Fixpunktsatz . . . . .	152
3.5.11	Eigenschaften der Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ . . . . .	156
3.5.12	Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ . . . . .	162
3.5.13	Die Logarithmusfunktion . . . . .	163
3.5.14	Die hyperbolischen Funktionen . . . . .	164
<b>4</b>	<b>Differentialrechnung</b>	<b>167</b>
4.1	Motivation . . . . .	167
4.2	Verallgemeinerung . . . . .	171
4.2.1	Einige Grenzwerte von Sin, Cos, Exp . . . . .	173
4.2.2	Berechnung elementarer Ableitungen . . . . .	176
4.3	Die Tangentengleichung . . . . .	179
4.4	Ableitungsregeln . . . . .	180

4.5	Lokale Extrema . . . . .	188
4.6	Der Mittelwertsatz . . . . .	189
4.7	Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Potenzreihen . . . . .	192
4.8	Monotonie . . . . .	196
4.9	Die Grenzwertsätze von de L'Hospital . . . . .	199
4.10	Krümmungseigenschaften . . . . .	203
4.11	MacLaurin- und Taylorreihenentwicklung . . . . .	204
4.12	Die Taylorreihe . . . . .	209
	4.12.1 Konvergenz der Taylorreihe . . . . .	210
	4.12.2 Beispiele . . . . .	210
	4.12.3 Anwendung der Potenzreihen . . . . .	211
	4.12.4 Konvergenzgeschwindigkeit von Taylorreihen . . . . .	212
	4.12.5 Zusammenhang zwischen Taylorreihen und Extremwerten . . . . .	214
4.13	Numerische Berechnung von Ableitungen . . . . .	216
4.14	Das Tangentenverfahren von Newton . . . . .	218
<b>5</b>	<b>Integration</b> . . . . .	<b>223</b>
5.1	Einleitung . . . . .	223
	5.1.1 Das unbestimmte Integral . . . . .	231
	5.1.2 Das bestimmte Integral . . . . .	232
	5.1.3 Die Flächenfunktion . . . . .	233
	5.1.4 Stammfunktion und Flächenfunktion . . . . .	234
	5.1.5 Die Stammfunktion von $1/x$ . . . . .	242
	5.1.6 Partialbruchzerlegung . . . . .	243
5.2	Flächenberechnungen . . . . .	248
5.3	Fläche und Integral zwischen zwei Funktionen . . . . .	249
5.4	Integration zur Berechnung von Flächen zwischen mehreren Funktionen . . . . .	251
5.5	Die Mittelwertsätze der Integralrechnung . . . . .	252
5.6	Das Restglied der Taylorreihe in Integraldarstellung . . . . .	253
	5.6.1 Das Restglied nach Lagrange . . . . .	255
5.7	Längenberechnung . . . . .	256
5.8	Mantelflächenberechnung . . . . .	260
5.9	Rotationsvolumen . . . . .	262
5.10	Numerische Berechnung von Integralen . . . . .	264
5.11	Differentiation von Integralen mit variablen Grenzen . . . . .	267
5.12	Parameterintegrale . . . . .	268
<b>6</b>	<b>Wachstums- und Zerfallsprozesse</b> . . . . .	<b>271</b>
6.1	Grundlagen der Evolutionsgleichungen . . . . .	271
	6.1.1 Einleitung: Die Evolutionsgleichung . . . . .	272
	6.1.2 Diskret oder kontinuierlich ? . . . . .	274
6.2	Ungebremstes Wachstum . . . . .	275
	6.2.1 Der diskrete Fall . . . . .	275
	6.2.2 Zeitteile . . . . .	276
	6.2.3 Grundsätzliches . . . . .	277

6.2.4	Der Übergang zum kontinuierlichen Modell . . . . .	279
6.2.5	Zusammenhang zwischen $k_{diskret}$ und $k_{kont}$ . . . . .	281
6.3	Gebremstes Wachstum - Störung erster Ordnung . . . . .	283
6.4	Das logistische Wachstum - Störungen zweiter Ordnung . . . . .	290
6.5	Systeme von Differenzgleichungen . . . . .	295
6.6	Zusammenfassung Wachstum und Zerfall . . . . .	297
<b>II</b>	<b>Übungen Analysis 1</b>	<b>299</b>
<b>7</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>301</b>
7.1	Grundlagen . . . . .	301
7.2	Komplexe Analysis . . . . .	302
<b>8</b>	<b>Folgen und Reihen</b>	<b>303</b>
<b>9</b>	<b>Konvergenz von Folgen, Reihen und Funktionen</b>	<b>309</b>
9.1	Konvergenz von Folgen . . . . .	309
9.2	Unendliche Reihen . . . . .	311
9.3	Potenzreihen . . . . .	313
9.4	Grenzwerte von Funktionen . . . . .	314
<b>10</b>	<b>Differentialrechnung</b>	<b>317</b>
10.1	Die Taylorreihe . . . . .	318
<b>11</b>	<b>Integration</b>	<b>321</b>
<b>12</b>	<b>Wachstums- und Zerfallsprozesse</b>	<b>323</b>
<b>III</b>	<b>Analysis 2</b>	<b>325</b>
<b>13</b>	<b>Uneigentliche Integrale</b>	<b>327</b>
13.1	Unendliche Integrationsintervalle . . . . .	329
13.2	Unbeschränkte Integranden auf endlichen Integrationsintervallen	331
13.3	Absolute Konvergenz . . . . .	333
13.4	Weitere Konvergenzkriterien . . . . .	334
13.4.1	Majoranten und Minorantenkriterium für unbeschränkte Integrationsintervalle . . . . .	334
13.4.2	Majoranten und Minorantenkriterium für unbeschränkte Integranden . . . . .	335
13.5	Das Integralkriterium zur Konvergenz von Reihen . . . . .	339

<b>14 Funktionen mehrerer Veränderlicher</b>	<b>349</b>
14.1 Grundbegriffe . . . . .	349
14.2 Rechnen in Vektorräumen . . . . .	349
14.3 Metrische Räume . . . . .	350
14.4 Normen im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	353
14.5 Das Skalarprodukt . . . . .	356
14.6 Mengen im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	363
14.6.1 Offene Mengen . . . . .	363
14.6.2 Abgeschlossene Mengen . . . . .	364
14.6.3 Beschränktheit und Ordnung . . . . .	364
14.7 Folgen im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	364
14.8 Darstellungsformen der Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . . . . .	367
14.9 Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	369
14.9.1 Grenzwerte im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	369
14.9.2 Schnittfunktionen (Partielle Funktionen) . . . . .	369
14.9.3 Partielle Ableitungen . . . . .	370
14.9.4 Differentiation komplexer Zahlen . . . . .	371
14.9.5 Stetigkeit . . . . .	372
14.9.6 Gleichmäßige Stetigkeit und Lipschitz Stetigkeit . . . . .	376
14.9.7 Fixpunkte im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	377
14.9.8 Der Gradient . . . . .	378
14.9.9 Die Tangentialebene . . . . .	380
14.9.10 Die Richtungsableitung . . . . .	382
14.10 Das vollständige Differential . . . . .	387
14.10.1 Anwendung: Fehlerrechnung . . . . .	388
14.10.2 Der relative Fehler . . . . .	389
14.10.3 Parametrische Funktionen . . . . .	390
14.10.4 Die Kettenregel . . . . .	391
14.10.5 Kettenregel für Funktionen mit zwei Parametern . . . . .	392
14.10.6 Anwendung: Implizite Differentiation . . . . .	394
14.11 Partielle Ableitungen höherer Ordnung . . . . .	396
14.11.1 Divergenz und Rotation . . . . .	397
14.12 Die Taylorentwicklung für $f(x, y)$ . . . . .	401
14.12.1 Eindimensional . . . . .	401
14.12.2 Zweidimensional . . . . .	402
14.13 Relative Extremwerte ohne Nebenbedingungen . . . . .	404
14.13.1 Der eindimensionale Fall . . . . .	404
14.13.2 Lokale Extrema bei zwei Unbekannten . . . . .	405
14.13.3 Schreibweise als Hesse-Matrix . . . . .	411
14.13.4 Extremwerte im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	413
14.13.5 Weitere Verfahren zur Analyse der Kandidaten . . . . .	414
14.13.6 Beispiel 1: Nektar sammelnde Bienen . . . . .	415
14.13.7 Beispiel 2: Zugvögel (ohne Happy End) . . . . .	418
14.13.8 Anwendung der Extremwertberechnung: Regressionsanalyse	421
14.13.9 Approximation von Funktionen . . . . .	427
14.14 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen . . . . .	428

14.14.1 Lagrange Multiplikatoren . . . . .	429
14.15 Parametrische Funktionen und Kurvenintegrale . . . . .	438
14.15.1 Der Tangentenvektor . . . . .	438
14.15.2 Kurvenintegrale . . . . .	439
14.15.3 Die Potentialfunktion . . . . .	447
<b>15 Mehrdimensionale Integration</b>	<b>453</b>
15.1 Einleitung . . . . .	453
15.2 Berechnung der Integrale . . . . .	457
15.2.1 Berechnung von Integralen in kartesischen rechteckigen Koordinaten . . . . .	458
15.2.2 Integration über kartesische krummlinige Bereiche . . . . .	459
15.2.3 Weitere Anwendungen . . . . .	461
15.2.4 Integration in Polarkoordinaten . . . . .	463
15.2.5 Uneigentliche Integrale . . . . .	470
15.3 Dreifachintegrale . . . . .	473
15.3.1 Schwerpunktberechnungen . . . . .	474
<b>16 Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGL)</b>	<b>479</b>
16.1 Einleitung . . . . .	479
16.1.1 Einführende Beispiele (s. Wachstum und Zerfall) . . . . .	480
16.1.2 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen . . . . .	483
16.2 Lösungsverfahren für DGL'en erster Ordnung . . . . .	486
16.2.1 Geometrische Interpretation von $y'=f(x,y)$ . . . . .	486
16.2.2 Substitution . . . . .	489
16.2.3 Lineare DGL'en . . . . .	494
16.2.4 Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten . . . . .	498
16.2.5 Die Bernoulli-Differentialgleichung . . . . .	502
16.2.6 Zusammenfassung der Lösungsverfahren für DGL 1. Ord- nung . . . . .	503
16.2.7 Weitere linear inhomogene DGL'en mit nicht-konstanten Koeffizienten . . . . .	506
16.2.8 Potenzreihenansätze . . . . .	507
16.2.9 Exakte Differentialgleichungen . . . . .	510
16.3 Numerische Lösung einer expliziten DGL 1. Ordnung . . . . .	516
16.4 Lineare DGL'en 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten . . . . .	519
16.4.1 Lineare Differentialgleichungssysteme . . . . .	526
16.5 Anwendung 1: Die harmonische Schwingung . . . . .	531
16.6 Wachstumsprozesse mit Hilfe der Differentialgleichungen . . . . .	535
16.7 Differentialgleichungen für Störungen zweiter Ordnung . . . . .	537
 <b>IV Übungen Analysis 2</b>	 <b>539</b>
<b>17 Uneigentliche Integrale</b>	<b>541</b>

<b>18 Funktionen mehrerer Veränderlicher</b>	<b>543</b>
18.1 Metrische Räume . . . . .	543
18.2 Normen im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	543
18.3 Folgen im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	544
18.4 Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	544
18.5 Das vollständige Differential . . . . .	545
18.6 Partielle Ableitungen höherer Ordnung . . . . .	546
18.7 Die Taylorentwicklung für $f(x, y)$ . . . . .	546
18.8 Relative Extremwerte ohne Nebenbedingungen . . . . .	547
18.9 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen . . . . .	548
18.10 Parametrische Funktionen und Kurvenintegrale . . . . .	548
<b>19 Mehrdimensionale Integration</b>	<b>549</b>
19.1 Berechnung der Integrale . . . . .	549
<b>20 Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGL)</b>	<b>551</b>
20.1 Lösungsverfahren für DGL'en erster Ordnung . . . . .	551
20.2 Lineare DGL'en 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten . . . . .	553
20.3 DGL der Emotionen . . . . .	553