Fuzzy Arithmetical Methods for Possibilistic Uncertainty Analysis

Von der Fakultät
Konstruktions-, Produktions-, und Fahrzeugtechnik
der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs (Dr.–Ing.)
genehmigte Abhandlung

Vorgelegt von
Nico-Philipp Walz
aus Heilbronn

Hauptberichter: apl. Prof. Dr.–Ing. Michael Hanss
Mitberichter: Prof. dr. ir. David Moens

Tag der mündlichen Prüfung: 12. August 2016

Institut für Technische und Numerische Mechanik
Universität Stuttgart

2016

Schriften aus dem Institut für Technische und Numerische Mechanik der Universität Stuttgart

Herausgeber: Prof. Dr.-Ing. Prof. E.h. Peter Eberhard

Band 47/2016

Nico-Philipp Walz

Fuzzy Arithmetical Methods for Possibilistic Uncertainty Analysis

D 93 (Diss. Universität Stuttgart)

Shaker Verlag
Aachen 2016

Bibliographic information published by the Deutsche Nationalbibliothek
The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available in the Internet at http://dnb.d-nb.de.

Zugl.: Stuttgart, Univ., Diss., 2016

Copyright Shaker Verlag 2016
All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the prior permission of the publishers.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-4911-4
ISSN 1861-1651

Shaker Verlag GmbH • P.O. BOX 101818 • D-52018 Aachen
Phone: 0049/2407/9596-0 • Telefax: 0049/2407/9596-9
Internet: www.shaker.de • e-mail: info@shaker.de

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Technische und Numerische Mechanik (ITM) der Universität Stuttgart. Die zurückliegenden fünf Jahre haben mich in fachlicher Hinsicht, aber noch viel mehr in meiner persönlichen Entwicklung und Erfahrung bereichert. Das Vorwort möchte ich daher nutzen um den Menschen, die auf sehr verschiedene und vielfältige Art und Weise an der Entstehung der Arbeit beteiligt waren, meinen Dank auszusprechen.

Zunächst gilt dieser Dank Prof. Dr. ir. David Moens für die Übernahme des Mitberichts sowie das gezeigte Interesse und die wertvollen Anmerkungen zu meiner Arbeit.

Prof. Michael Hanss möchte ich für die Übernahme des Hauptberichts danken, aber vor allem auch dafür, dass er mir überhaupt die Möglichkeit gegeben hat diese Arbeit anfertigen zu können. Mit einer stets offenen Tür stand er mir mit Rat und Tat in jeglicher Angelegenheit zur Seite, gewährte mir aber gleichzeitig größtmögliche Freiheiten bei der inhaltlichen Ausrichtung der Arbeit. Der unverhoffte gemeinsame Wechsel an das ITM gleich zu Beginn dieser Zeit hat sich für mich als glückliche Fügung erwiesen, da diese Veränderung mir neue Perspektiven gezeigt und Möglichkeiten eröffnet hat. In diesem Zusammenhang möchte ich mich auch bei Prof. Peter Eberhard, dem Leiter des Instituts, für die Aufnahme am ITM bedanken. Er hat es geschafft das Institut mit einer angenehmen Atmosphäre und interessanten, starken Persönlichkeiten zu füllen, was das Arbeiten am Institut auch in anstrengenden Phasen nie zur Last werden ließ.

In der Zeit am ITM mangelte es nicht an spannenden Diskussionen und spaßigen Erlebnissen, wobei auche viele neue Freundschaften entstanden sind. Daher möchte ich einen großen Dank dem gesamten Institut aussprechen, allen ehemaligen und neuen Mitgliedern des ITM, da es letztlich sie waren, die die Atmosphäre am Institut geprägt haben und sicherlich weiterhin prägen werden. Mit einer ungewöhnlichen Konzentration an Kompetenz, manchmal gewöhnungsbedürftigem Charme und gleichzeitig scheinbarer Verrücktheit war es schwer sich fachlichen und nicht-im-geringsten-fachlichen Scharmützeln zu entziehen. Trotz der vielen Albernheiten speziell im Zomtec-Zimmer – oder gerade deswegen – habe ich hier gelernt was wissenschaftliches Denken und Arbeiten ausmacht. Ein besonderer Dank geht deshalb an diejenigen, die mit mir einen großen Teil ihrer Tage genau damit verbracht haben.

Michael Junge und Pascal Reuß, ehemalige Mitarbeiter des Instituts für angewandte und experimentelle Mechanik, möchte ich danken, da sie mir bereits in meiner Zeit als Student einen Einblick in die akademische Welt gegeben haben, mich dazu ermutigt haben darin einzutauchen und damit ihren Anteil am Entstehen dieser Arbeit haben.

Die vielen Jahre des Studiums und der Promotion sowie all die damit verbundenen Erfahrungen, die ich dabei machen konnte und durfte, wären ohne die Unterstützung meiner Familie nicht möglich gewesen, weshalb ich ihnen nicht genug danken kann. Meine Eltern haben mich stets dazu ermutigt meine Ziele zu verfolgen und mich darin jederzeit bestärkt. Meine Frau Tina war während der gesamten Zeit, seit nunmehr immerhin elf Jahren, an meiner Seite. Sie war stets der Rückhalt auf den ich mich verlassen konnte und gleichzeitig die Ablenkung, die mich aus dem ein oder anderen Loch gelockt hat. Zusammen haben wir ein weiteres großes Kapitel unserer gemeinsamen Zeit nun abgeschlossen und ich bin gespannt, was noch alles auf uns wartet.

Danke!

Nico-Philipp Walz Bad Friedrichshall, im August 2016.

für Tina

"In general, complexity and precision bear an inverse relation to one another in the sense that, as the complexity of a problem increases, the possibility of analyzing it in precise terms diminishes. Thus it is a truism that the class of problems which are susceptible of exact solution is much smaller than that which can be solved approximately."

— Lotfi A. Zadeh [Zadeh72]

Contents

Kurzfassung XIII

Abstract XVII

1 Introduction **1**

1.1 Uncertainty Models 2

1.2 Uncertainty Analysis 3

1.3 Outline of the Thesis 4

1.4 Notation 6

I Possibility Theory **7**

2 Possibility Measures **8**

2.1 Information and Decision 9

2.1.1 Observable Variables 10

2.1.2 Uncertainty 10

2.2 Formal Description of Possibility and Necessity 11

2.3 Joint, Marginal and Conditional Possibility 13

2.4 Propagating Possibility 15

2.5 Relation to Probabilities 17

2.5.1 Joint Measures and Propagation 18

2.5.2 Prediction and Confidence Intervals 19

2.5.3 Choquet Integrals and Expected Values 20

2.6 Plausibility and Belief – Random Sets 21

3 Fuzzy Sets and Fuzzy Functions **25**

3.1 Fuzzy Sets and Numbers 25

3.1.1 Fuzzy Vectors and Multivariate Membership Functions 29

3.2 Extension Principle – Fuzzy Functions 32

3.3 Fuzzy Sets and Possibility Distribution Functions 33

3.3.1 Fuzzy Numbers and Probability Density Functions 33

3.3.2 Marginal and Conditional Membership 36

3.3.3 Propagating Uncertainties 39

3.3.4 Prediction and Confidence Intervals 42

3.3.5 Expected Values 42

II Possibilistic Uncertainty Analysis **45**

4 Problems in Possibilistic Uncertainty Analysis **46**

4.1 Fuzzy Systems 47

4.1.1 Dynamical Systems with Uncertain Parameters 49

4.2 Possibilistic Analysis of Fuzzy Systems 53

4.2.1 The Direct Problem 53

4.2.2 The Sensitivity Problem 54

4.2.3 The Inverse Problem 55

5 The Direct Problem **57**

5.1 Explicit Fuzzy Systems 57

5.1.1 The α-Cut Method 58

5.1.2 The Extension Principle Method 65

5.1.3 The Sampling Method 69

5.1.4 Scalar Test Case 80

5.1.5 Multidimensional Fuzzy Outputs 85

5.1.6 Two-Dimensional Test Case – Eigenvalues of a Dynamical System . 87

5.1.7 Independent Variables 91

5.2 Fuzzy Implicit Functions and Inequalities 96

5.2.1 Possibilistic Analysis of Implicit Fuzzy Systems 96
5.2.2 The α-Cut Approach 99
5.2.3 The Extension Principle Approach 99
5.2.4 The Sampling Approach 100
5.2.5 Implicit Test Case – Mathieu Equation with Multiple Delays 101
5.3 Discussion 104

6 The Sensitivity Problem 109
6.1 High-Dimensional Model Representation 110
6.2 Sensitivity Measures for Fuzzy Uncertainty Analysis 113
6.3 Numerical Approximation Using Sparse Grids 115
6.3.1 Basic Theory of Hierarchical Grids 116
6.3.2 Hierarchical Basis Functions 117
6.3.3 Optimal Subspace Selection – Sparse Grids 118
6.3.4 The Relation of Hierarchical Subspaces and HDMR Components . . 119
6.3.5 Approximate Sensitivity Measures 122
6.4 Test Case 124

7 The Inverse Problem 129
7.1 Prior Knowledge 131
7.1.1 Parameterizing Fuzzy Numbers 132
7.2 Fuzzy Regression 133
7.2.1 Distance Between Fuzzy Sets 133
7.2.2 The Fuzzy Least-Squares Formulation 135
7.3 Fuzzy Inverse Coverage Problem 136
7.4 Identifiability 137
7.5 Implementation 139
7.6 Test Case 140

8 Conclusion and Outlook 143
8.1 Outlook 145

Appendix **147**

A.1 HDMR component functions 147

Literature **158**

Kurzfassung

Die numerische Simulation hat sich zu einem wichtigen Bestandteil der Entwicklungsarbeit in den Ingenieurswissenschaften aber auch in der Ingenieurspraxis entwickelt. Die Simulationsergebnisse sind jedoch zumeist mit Unsicherheiten in Bezug auf deren Exaktheit behaftet, da etwa vereinfachende Annahmen für das zu modellierende System getroffen wurden oder dessen Modellparameter nicht exakt bekannt sind. Aus diesem Grund werden Berechnungen in der Regel mit ausreichend hohen Sicherheitsfaktoren bewertet. Sofern dieser Wert ausreichend konservativ gewählt wird, ergeben sich Sicherheitsreserven, die eine einwandfreie Funktion des Systems sicherstellen, gleichzeitig bleiben jedoch möglicherweise Potentiale ungenutzt und Resourcen werden verschwendet. Eine Aussage über die tatsächlichen Auswirkungen der Unsicherheiten ist damit jedoch nicht möglich.

Um zu genaueren und aussagekräftigeren Ergebnissen zu gelangen und damit geringere Sicherheitsreserven vorhalten zu müssen, werden die Modelle immer weiter verfeinert. Ermöglicht durch weiterentwickelte Methoden, aber auch maßgeblich durch die stetig zunehmende verfügbare Rechenleistung, nimmt die Komplexität der verwendeten Modelle dadurch kontinuierlich zu. Die Güte der Simulationsergebnisse, d.h. deren Übereinstimmung mit Messungen des realen Systems, verbessert sich jedoch sehr häufig nicht in äquivalenter Weise. Die höhere Komplexität der Modelle erschwert nämlich zugleich eine korrekte Parametrierung, sodass Unsicherheiten bezüglich des Modells immer noch vorhanden sind. Wie sich diese Unsicherheiten jeweils auf die Vorhersagen der Modelle auswirken bestimmt letztlich wie verlässlich die Simulationsergebnisse sind.

Um belastbare Aussagen über die Auswirkungen der Unsicherheiten auf die Vorhersagen machen zu können, müssen Unsicherheitsanalysen durchgeführt werden. Dies erfordert zunächst ein geeignetes Modell der Unsicherheiten auf dessen Basis dann die entsprechenden Analysen durchgeführt werden können. Unsicherheiten die aus Vereinfachungen oder unvollständigem Wissen über das System resultieren, werden als epistemisch bezeichnet. Diese grenzen sich von den sogenannten aleatorischen Unsicherheiten ab, welche etwa durch zufällige Schwankungen charakterisiert sind. Eine tatsächlich scharfe Trennung ist jedoch nicht immer möglich, da auch bei der Beschreibung von Zufallsprozessen zusätzliche Ungenauigkeiten durch Vereinfachung und nicht vollständig Bekannte Verteilungen der beteiligten Größen auftreten können. Während Letztere durch die Wahrscheinlichkeitstheorie beschrieben und mittels probabilistischer Verfahren analysiert werden können, kommen für Erstere sinnvollerweise andere Verfahren zum Einsatz. Die Möglichkeitstheorie (englisch *possibility theory*) ist eine geeignete Theorie zur Beschreibung dieses unvollständigen Wissens, was sich oftmals aus vorhandenem Expertenwissen, einer dünnen Datenlage oder einer Kombination der beiden ergibt.

Da gerade diese Art der epistemischen Unsicherheiten überaus häufig in ingenieurtechnischen Fragestellungen und im Besonderen in den frühen Entwicklungsstadien anzutref-

fen sind, befasst sich diese Arbeit mit possibilistischen Methoden zur Unsicherheitsanalyse. Die hier vorgestellten und angewandten Methoden basieren auf fuzzy-arithmetischen Konzepten. Das bedeutet, dass die Unsicherheiten der Modellparameter durch fuzzywertige Größen abgebildet werden. Der Inhalt der Arbeit wird im Folgenden kurz zusammengefasst, wobei zusätzlich zur Gliederung in Kapitel eine Grobgliederung in zwei Teile zur Trennung von theoretischen und praktischen Überlegungen vorgenommen wurde.

Der erste Teil widmet sich den theoretischen Grundlagen zur Möglichkeitstheorie und zur Fuzzy-Mengen-Theorie. Besonderes Augenmerk wurde hier auf die Verknüpfungen und Unterschiede beider Theorien gelegt, um speziell auch eine Abgrenzung zur Probabilistik zu ermöglichen. Begonnen wird mit der maßtheoretischen Betrachtung der Beschreibung von Möglichkeit und Notwendigkeit von Ereignissen zur Bewertung und Weiterverarbeitung von unvollständigem Wissen. Damit ist eine Überführung des vorhandenen Wissens in ein mathematisch, zunächst abstraktes Konstrukt verfügbar, welches jedoch wichtig zum Verständnis der Eigenschaften von possibilistischen Methoden ist. Der Vergleich mit unterschiedlichen Konzepten zur Beschreibung von Information und Unsicherheit kann in diesem maßtheoretischen Rahmen sinnvoll geführt werden.

Im anschließenden Abschnitt zur Fuzzy-Theorie werden zunächst die Fuzzy-Mengen und Fuzzy-Funktionen traditionell eingeführt. Anschließend wird deren Eignung für eine quantitative Beschreibung von Möglichkeiten gezeigt und die erforderlichen Einschränkungen beschrieben. Dazu werden die im vorherigen Kapitel präsentierten Konzepte auf Fuzzy-Größen übertragen und die hierfür notwendigen Voraussetzungen diskutiert, sodass die Unterschiede zwischen dem possibilistischen Unsicherheitsmodell und der Fuzzy-Theorie deutlich werden.

Der zweite Teil beschäftigt sich mit generellen Herangehensweisen und numerischen Verfahren zur Unsicherheitsanalyse dynamischer Systeme, die mittels possibilistischer Variablen parametriert sind. Der Fokus liegt hierbei auf dem Aufzeigen verschiedener grundlegender Strategien und deren praktischer Umsetzung. In einem ersten Schritt werden sogenannte Fuzzy-Systeme eingeführt, welche als abstraktes Konzept zur vereinheitlichten Darstellung von possibilistischen Unsicherheitsanalysen dynamischer Systeme verwendet werden. Die Fuzzy-Systeme beschreiben das Übertragungsverhalten der Parameterunsicherheiten auf die Ausgangsgröße des dynamischen Systems, welches durch eine Funktion in expliziter oder impliziter Form beschrieben werden kann. Für diese Klasse von Systemen werden verschiedene Ausprägungen sowie die unterschiedlichen Problemstellungen diskutiert. Diese umfassen das direkte Problem, das Sensitivitätsproblem und das inverse Problem. Das direkte Problem stellt die Analyse des Übertragungspfades der Unsicherheiten dar. Das Sensitivitätsproblem dient zur Ermittlung der individuellen Einflüsse der Parameterunsicherheiten auf die Ausgangsgröße. Das inverse Problem beschäftigt sich schließlich mit der Schätzung der Modellparameter, wobei auf Basis von verfügbarer Information über die Ausgangsgröße die Parameter in Verbindung mit den enthaltenen

Unsicherheiten ermittelt werden sollen.

Ein wesentlicher Teil der Arbeit behandelt Strategien zur Behandlung des fuzzy-arithmetischen Problems und damit dem possibilistischen direkten Problem, da dieses letztlich den Kern zur Behandlung der weiteren Probleme bildet. Neben dem bereits etablierten Verfahren basierend auf der α-Schnittzerlegung, das einige unterschiedliche Realisierungen kennt, werden zwei neue Strategien eingeführt und hergeleitet, welche eine jeweils andere Form der Diskretisierung der Fuzzy-Systeme verwenden. Bei dem α-Schnittverfahren entstehen durch die Diskretisierung gewisse Einschränkungen, die durch alternative Verfahren zum einen besser verstanden und zum anderen auch teilweise umgangen werden können. Die prinzipielle Anwendbarkeit und Effektivität der Strategien und Methoden für die unterschiedlichen Ausprägungen der Fuzzy-Systeme wird dabei stets berücksichtigt, weshalb die Verfahren jeweils für unterschiedliche Fälle gesondert betrachtet werden. Die neu eingeführten Verfahren zeigen hierbei, dass für jede dieser Ausprägungen andere Voraussetzungen an die Verfahren gestellt werden, weshalb sich diese auch als jeweils unterschiedlich gut geeignet herausstellen. Sowohl das etablierte α-Schnittverfahren als auch die neuen Verfahren offenbaren Stärken und Schwächen, wobei letztere für gewisse Probleme überhaupt erst eine Lösung zulassen.

Durch das Loslösen von den zugrundeliegenden Verfahren zur Lösung von fuzzy-arithmetischen Problemen und mit Anleihen an probabilistische Sensitivitäten, wird ein konsistentes Sensitivitätsmaß für Fuzzy-Systeme eingeführt. Die Verbindung zu probabilistischen Größen ist durch die maßtheoretischen Betrachtungen in Teil I und die dabei gezeigten Gemeinsamkeiten gut begründet. Dieses Sensitivitätsmaß basiert auf einer Zerlegung der dem Fuzzy-System zugehörigen Funktion, der sogenannten *High-Dimensional Model Representation*, deren Verwandtschaft zu der Dünngitterstruktur eine numerisch effiziente Umsetzung mittels Dünngitterverfahren erlaubt. Durch die zuvor eingeführten unterschiedlichen Verfahren ist eine einfache Implementierung direkt möglich.

Der inhaltlich letzte Abschnitt der Arbeit beschäftigt sich mit dem inversen Problem, wobei weder die Vielzahl der vielen möglichen Umsetzungen von inversen Problemen noch eine detaillierte Ausarbeitung eines speziellen Problems die Zielstellung ist. Dieser Abschnitt behandelt das Problem aufbauend auf den vorherigen Herleitungen und Erläuterungen, sowohl aus Teil I, also den theoretischen Beschreibungen der Unsicherheiten in diesem Kontext, als auch aus Teil II, der sich mit den methodischen Fragestellungen beschäftigt. Dazu werden die üblichen Fehler bei der Formulierung eines inversen Problems und die entsprechenden Überlegungen für eine sinnvolle Umsetzung diskutiert. Beispielhaft werden anschließend zwei bekannte Realisierungen eines fuzzy-wertigen inversen Problems skizziert und die Umsetzung mit den zuvor eingeführten Verfahren zur Lösung des direkten und des Sensitivitätsproblems beschrieben. Dies soll vor allen Dingen zeigen, dass die präsentierten Strategien und Methoden sowie die Einbeziehung der possibilistischen Grundlagen eine sinnvolle als auch effiziente Umsetzung erleichtern können.

Insgesamt soll die vorliegende Arbeit einen neuen Blickwinkel auf possibilistische Unsicherheitsanalysen ermöglichen. Dazu werden die existierenden Theorien und Konzepte neu eingeordnet und auf dieser Basis neue Methoden und Verfahren entwickelt, die die Untersuchung verschiedener Problemstellungen erlaubt.

Abstract

In the development process of new products, the engineer is always facing the issue that there are uncertainties about particular aspects of the system. These uncertainties may be classified into different models of uncertainties, either stemming from variability of the modeling parameters or from a lack of knowledge about the true configuration of the system. The latter type of uncertainties is known as epistemic uncertainties and is present in every stage of development, but in particular in early stages, where decisions based on numerical models shall be conducted. In order to completely characterize the possible behavior of the system, given the available – but incomplete – information, an uncertainty analysis has to be performed. Uncertainty analyses use an uncertainty model in order to accumulate the available knowledge and to correctly specify the whole range of possible outcomes of the respective analysis.

The incomplete knowledge is properly described by a possibilistic uncertainty model which is described by possibility theory. The well-known fuzzy sets provide a mathematical formulation of a possibilistic model, so that fuzzy arithmetical concepts can be applied for the uncertainty analysis. In this thesis, diverse methods and concepts are developed for various aspects of possibilistic uncertainty analysis.

As a starting point, an overview of possibility theory and its application to uncertainty analysis is presented in the first part, where the fundamental concepts of possibility theory and its proper description and quantification by fuzzy set theory is explained in detail. Fuzzy arithmetical methods have often been used without reference to possibility theory, which is however an important tool in order to draw well-founded conclusions from a fuzzy arithmetical analysis. Therefore, this presentation shall provide important concepts for uncertainty analysis of dynamical systems. The possibility theoretical treatment based on measure theory also allows for a concise comparison to probability theory, which is difficult to conduct in pure fuzzy arithmetical terms.

The second part of the thesis is devoted to the development of numerical methods for different aspects of uncertainty analysis. Therefore, it begins with the introduction of problems that arise when dynamical systems are parameterized using possibilistic variables. A representative class of systems is introduced that maps the uncertain model parameters to the output quantities in an explicit or implicit fashion. This leads to the definition of the three fundamental problems of uncertainty analysis, i.e. the direct problem, which is given by the calculation of the uncertainties of the output of a system given the uncertainties of the model parameters, the sensitivity problem, where the influence of each individual model parameter on the overall output uncertainty is to be determined, and the inverse problem, where the goal is to identify the model parameters including the implied uncertainty on the correctness of the identification given some information on the model behavior or output values.

For each of these problems, strategies for their solution are derived, where the main focus lies on concepts for the direct and the sensitivity problem. For the solution of such systems, fuzzy arithmetical methods are used, where besides the well-known α-cut solution method two additional numerical strategies are developed and presented. Throughout the thesis, the intent is to demonstrate principal strategies that are applicable for a numerical treatment of these problems, as this is a prerequisite for the application to more complex dynamical systems. It will be seen that the different schemes have very distinct properties and are capable of outperforming the α-cut schemes in specific use cases. Still, the α-cut scheme has its own advantages. The explicit reference to possibility theory helps to properly derive the methods and to provide deliberate conclusions of the results.

Similarly, the possibility theoretical considerations and the explained differences and connections to probability theory subsequently allow for a clean and comprehensible development of a sensitivity analysis approach for the introduced class of systems. In addition, a numerically efficient implementation on the basis of sparse-grid methods and the solution procedures of the previous chapter for the involved solution of a fuzzy system is explained. The determination of sensitivities is a crucial part of uncertainty analysis, as the information of the individual influences of the parameters and their uncertainties is vital for the comprehension of the model and for the further development and investigation of the system.

The last topical chapter treats inverse problems by using existing ideas for the definition of identification problems in order to illustrate how the developed methods for the direct and the sensitivity problem may be applied for this purpose. The focus is laid on the explanation of principle concepts for inverse problems, elucidating on common pitfalls in the design of such methods. There is not one, but many different realizations of inverse problems, depending on the information that is to be extracted from given output data. At the core, however, most of the inverse problems require a solution of a direct problem, so that proper methods are needed for their solution.

In summary, the thesis shall provide a different point of view on possibilistic uncertainty analysis by, first, reviewing and recapitulating existing concepts in a concise and suitable way in order to present them in a new perspective, and, second, developing new methods for the different aspects of uncertainty analysis on that basis.