Berichte aus der Steuerungs- und Regelungstechnik

Boris Lohmann, Günter Roppenecker (Hrsg.)

Methoden und Anwendungen der Regelungstechnik

Erlangen-Münchener Workshops 2013 und 2014

Shaker Verlag
Aachen 2015

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Copyright Shaker Verlag 2015
Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-3797-5
ISSN 0945-1005

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen
Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9
Internet: www.shaker.de • E-Mail: info@shaker.de

Vorwort

Die Lehrstühle für Regelungstechnik der Technischen Universität München und der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg führen jährlich einen

Workshop zu Methoden und Anwendungen der Regelungstechnik

durch, bei dem durch Vorträge und reichlich Diskussionsmöglichkeit der wissenschaftliche Austausch zwischen den Lehrstühlen gepflegt und gefördert wird. Dabei werden neben Übersichtsvorträgen insbesondere aktuelle Ergebnisse aus den einzelnen Forschungsrichtungen, aber auch Beiträge zu offenen Fragen und neuen Forschungsideen präsentiert.

Der vorliegende Band enthält eine Auswahl von Beiträgen zu den Workshops 2013 und 2014 und gibt so einen Einblick in ausgewählte Arbeitsgebiete der Lehrstühle und die erreichten Ergebnisse.

Für die Übernahme der verschiedenen organisatorischen und redaktionellen Aufgaben zur Erstellung des vorliegenden Bandes danken wir Herrn Richard Kern, M.Sc. Weiterhin sei die angenehme Atmosphäre am Tagungsort, dem hoch über dem Altmühltal gelegenen Bistumshaus Schloss Hirschberg bei Beilngries, erwähnt, die wie immer zum Gelingen der Workshops beigetragen hat.

Im Juni 2015

Boris Lohmann
Lehrstuhl für Regelungstechnik
TU München

Günter Roppenecker
Lehrstuhl für Regelungstechnik
FAU Erlangen-Nürnberg

Inhaltsverzeichnis

Algebraische Methode zur Parameteridentifikation in linearen verteilt-parametrischen Systemen 1

Richard Kern, München

Konzepte zur Regelung eines aktiven Fahrwerks unter Beibehaltung der Aktordynamik 15

Klaus Löhe, Erlangen

Abschätzung des Einzugsbereichs unter Stellgrößenbeschränkung für die passivitätsbasierte Regelung mittels Takagi-Sugeno-Formulierung 30

Sergio Delgado und Klaus J. Diepold, München

Zwei-Freiheitsgrade-Regelung eines Einzylinder-Dieselgenerators unter Berücksichtigung der Periodizität 40

Johannes Popp und Joachim Deutscher, Erlangen

Zeitvariante parametrische Modellordnungsreduktion am Beispiel von Systemen mit wandernder Last 57

Maria Cruz Varona, Matthias Geuß und Boris Lohmann, München

Zustandsschätzung nach Kalman auf einem bewegten Horizont variabler Länge 71

Matthias Bittner, Michael Buhl und Boris Lohmann, München

Algebraische Methode zur Parameteridentifikation in linearen verteilt-parametrischen Systemen

Richard Kern
Lehrstuhl für Regelungstechnik, Technische Universität München
Boltzmannstr. 15, 85748 Garching
E-Mail: richard.kern@tum.de

Dynamische Prozesse, bei welchen die Systemgrößen eine kontinuierliche Abhängigkeit vom Ort aufweisen, können durch partielle Differentialgleichungen beschrieben werden. Durch die Anwendung der Laplace-Transformation werden diese Gleichungen in gewöhnliche Differentialgleichungen überführt und anschließend im Bildbereich gelöst. Die Lösung kann durch Manipulation in eine in den gesuchten Parametern polynomiale Gleichung umgeformt werden, in welcher die Produkte der transformierten Messgrößen als Koeffizienten auftreten. Durch diese, im Zeitbereich interpretierbare Identifikationsgleichung, lassen sich die unbekannten Parameter ohne eine Approximation der Systemgleichungen bestimmen. In diesem Beitrag werden anhand von Beispielen die Anwendungsmöglichkeiten der Methode aufgezeigt und mithilfe einer Vergleichsstudie und experimenteller Daten die Vor- und Nachteile diskutiert.

1 Einleitung

Bei vielen dynamischen Systemen ändern sich die Systemgrößen nicht nur mit der Zeit, sondern hängen auch kontinuierlich vom Ort ab. Typische Beispiele hierfür sind elastische Verformungen in der Strukturmechanik, räumliche Temperaturverteilungen bei thermischen Prozessen oder die Beschreibung von Strömungsphänomenen. Die Modellbildung dieser sogenannten verteilt-parametrischen Systeme führt auf partielle Differentialgleichungen, welche, anders als bei konzentriert-parametrischen Systemen, einen unendlich-dimensionalen Zustandsraum aufweisen.

In den letzten Jahren hat diese Systemklasse aus regelungstechnischer Sicht verstärkt an Aufmerksamkeit gewonnen und es wurden leistungsfähige Methoden zur Steuerung, Regelung und Analyse entwickelt [1, 2]. Dabei handelt es sich oftmals um modellbasierte Ansätze, welche infolgedessen nur anwendbar sind, wenn die Prozesse hinreichend genau durch mathematische Gleichungen beschrieben werden können. Die Struktur dieser Modelle ergibt sich direkt aus den Erhaltungssätzen der Physik, beispielsweise durch die Bilanzierung der Systemgrößen. Parameter, welche direkten Messungen nicht zugänglich sind, müssen oftmals aufwendig experimentell bestimmt werden. Dies geschieht gewöhnlich durch die Auswertung der messtechnisch erfassbaren Größen, um Rückschlüsse auf die nicht messbaren Parameter zu ziehen. Das dabei entstehende inverse Problem ist meist inkorrekt gestellt und die numerische Lösung aufgrund der resultierenden schlechten Konditionierung aufwendig [3].

Die existierenden Ansätze zur Lösung von Identifikationsproblemen für verteilt-parametrische Systeme beruhen im Allgemeinen auf zwei unterschiedlichen Vorgehensweisen, *early-lumping* und *late-lumping*. Die beiden Ansätze unterscheiden sich bezüglich des Vorgehens bei der Herleitung der auszuwertenden Gleichungen [4].

Beim Early-Lumping-Ansatz werden die partiellen Differentialgleichungen aus der Modellbildung mit geeigneten Methoden in gewöhnliche Differential- oder Differenzengleichungen überführt (z.B. durch die Methode der finiten Differenzen). Hierbei entsteht ein endlich-dimensionales (d.h. konzentriert-parametrisches) System. Der Vorteil dieses Vorgehens besteht darin, dass für diese Klasse von Systemen fundierte Methoden zur Identifikation der Parameter zur Verfügung stehen [5, 6]. Allerdings kommt die Ordnung der Approximationsmethode als wesentlicher Entwurfsparameter hinzu. Diese wird sehr groß gewählt, wodurch die Dimension der dabei entstehenden Modelle hoch ist. Hierdurch werden unter Umständen zusätzlich Methoden der Modellreduktion benötigt, um die Modelle einer effizienten numerischen Berechnung zugänglich zu machen.

Beim Late-Lumping-Ansatz wird die Dynamik des verteilt-parametrischen Systems möglichst vollständig berücksichtigt. Eine Diskretisierung geschieht erst durch die digitale Implementierung bzw. durch die Auswertung von diskreten Messwerten. Dies verhindert die anfänglichen Approximationsfehler, welche typischerweise beim Early-Lumping-Ansatz entstehen. Allerdings ist der Aufwand für die Analyse und die Herleitung einer Identifikationsgleichung deutlich größer [1, 7].

Die in dieser Arbeit primär verwendete algebraische Methode zur Parameteridentifikation aus [8] zählt zu den Late-Lumping-Ansätzen. Gegenstand der Betrachtung ist eine Klasse von Systemen, die durch örtlich eindimensionale, lineare partielle Differentialgleichungen mit örtlich verteilten Koeffizienten und örtlich konzentriertem Stelleingriff beschrieben werden. Ziel der Methode ist es, über die Anwendung der Laplace-Transformation und Umformungen im Bildbereich, eine Identifikationsgleichung herzuleiten. Diese setzt, mithilfe zweier unabhängiger Messungen, das Ein-/Ausgangsverhalten des Systems so in Beziehung, dass sich die gesuchten Parameter im Zeitbereich aus gewissen Faltungsprodukten der Messsignale berechnen lassen.

Im Folgendem wird zunächst die Entwicklung der algebraischen Methode zur Parameteridentifikation anhand von einfachen Beispielen illustriert und die Erweiterung dieses Ansatzes auf komplexere Systemklassen beschrieben. Im zweiten Abschnitt wird die Methode zur Bestimmung der Länge des *schweren Seils* angewandt. Für dieses System folgt eine experimentelle Studie sowie ein Vergleich der Ergebnisse mit den Resultaten einer Parameteridentifikation, die auf einem numerischen Optimierungsverfahren beruht. Dabei werden die Vor- und Nachteile des jeweiligen Vorgehens diskutiert.

2 Ein Überblick über die Entwicklung der algebraischen Methode

Das Konzept der algebraischen Methode zur Parameteridentifikation bei bekannten Stell- und Messsignalen für zeitkontinuierliche, lineare und endlich-dimensionale Systeme stammt von Fliess und Sira-Ramírez [9] und basiert auf der Algebraisierung der Systemgleichungen durch die Laplace-Transformation. Durch diese Integraltransformation wird einer beliebigen Zeitfunktion $f(t)$ mit $t \geq 0$ die komplexe Bildfunktion $F(s)$ der Variablen s durch

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} \mathrm{d}t, \qquad s \in \mathbb{C} \tag{1}$$

eindeutig zugeordnet, wobei das uneigentliche Integral in Gl. (1) existieren muss [10]. Zeitableitungen von Funktionen ${}^{\mathrm{d}^n}/_{\mathrm{d}t^n} f(t) = f^{(n)}(t)$ werden durch die Korrespondenz

$$f^{(n)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) s^{n-k-1} \tag{2}$$

im Bildbereich algebraisiert (dies bewirkt, dass gewöhnlichen Differentialgleichungen im Zeitbereich auf algebraische Gleichungen im Bildbereich abgebildet werden). Das Vorgehen aus [9] für die Herleitung einer Identifikationsgleichung soll im folgenden Beispiel gezeigt werden.

Beispiel 1 (LTI-System 1. Ordnung)

Exemplarisch soll System

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t) = a y(t) + u(t) + \gamma, \qquad t \in [0, \infty[\tag{3}$$

betrachtet werden, wobei $y(t)$ die bekannte Messtrajektorie, $u(t)$ die bekannte Eingangstrajektorie, a der gesuchte konstante Parameter und γ eine unbekannte, konstante Störung ist. Die Anwendung der Laplace-Transformation auf Gl. (3) ergibt

$$sY(s) - y(0) = aY(s) + U(s) + \frac{\gamma}{s}, \qquad s \in \mathbb{C}, \tag{4}$$

mit der Mess- und Eingangsgröße im Bildbereich $Y(s)$ bzw. $U(s)$ sowie der unbekannten Anfangsbedingung $y(0)$. Durch die mehrfache Differentiation von Gl. (4) nach s und die mehrmalige Multiplikation mit s ist es möglich, die konstante Störung und die Anfangsbedingung zu eliminieren. Es kann der Zusammenhang

$$\begin{aligned} &\left(as^{-1} - 1\right) Y''(s) + \left(2as^{-2} - 4s^{-1}\right) Y'(s) - 2Y(s) \\ &= -s^{-1} U(s)'' - 2s^{-2} U'(s) \end{aligned} \tag{5}$$

hergeleitet werden, in welchem die Notation $Y'(s) = {}^{\mathrm{d}}/_{\mathrm{d}s} Y(s)$ bzw. $U'(s) = {}^{\mathrm{d}}/_{\mathrm{d}s} U(s)$ entspricht. Diese Gleichung ist affin im unbekannten Parameter a kann und mühelos in den Zeitbereich rücktransformiert[1] und nach a aufgelöst werden. Dadurch ist es möglich, den Parameter a mathematisch exakt und ohne Kenntnis der Anfangsbedingung $y(0)$ oder der konstanten Störung γ zu bestimmen.

Der Ansatz aus [9] wurde von Rudolph und Woittennek in [8] auf unendlich-dimensionale Systeme, die mittels örtlich eindimensionaler, linearer partieller Differentialgleichungen mit örtlich konzentriertem Stelleingriff beschrieben werden, erweitert. Durch die Anwendung der Laplace-Transformation auf die Zeitfunktionen können die partiellen Differentialgleichungen in gewöhnliche Differentialgleichungen in der Ortsvariablen z überführt werden. Mithilfe der Fundamentallösung dieses Problems (im Allgemeinen transzendente Funktionen in s und z) und der Auswertung der Randbedingungen können die bekannten Ein- und Ausgangsgrößen in Beziehung gesetzt werden. Diese von z unabhängigen Gleichungen beschreiben das Ein-/Ausgangsverhalten des Systems im Bildbereich. Da die darin auftretenden transzendenten Funktionen eine separate, autonome gewöhnliche Differentialgleichung bezüglich s erfüllen, können diese durch das Generieren weiterer Gleichungen über die Ableitungen der Ein-/Ausgangsbeziehung nach s eliminiert werden. Dieses Vorgehen wird im Folgenden beispielhaft an einer einfachen partiellen Differentialgleichung, der eindimensionalen linearen Transportgleichung, gezeigt.

[1] Die entsprechenden Korrespondenztabellen für die Rücktransformation lassen sich beispielsweise in [10] finden.

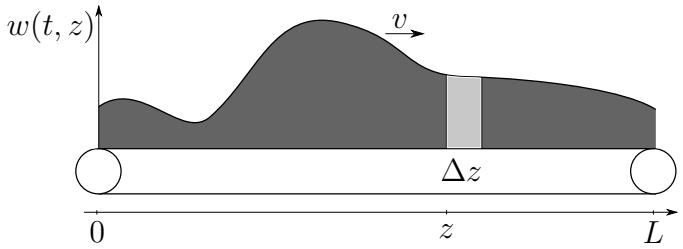

Abbildung 1: Schema des Transportbands

Beispiel 2 (Transportband)

Die Systemgleichung eines Transportbands der Länge L,

$$v\frac{\partial}{\partial z}w(t,z)+\frac{\partial}{\partial t}w(t,z)=0, \qquad t\in[0,\infty[, \quad z\in[0,L], \tag{6}$$

kann durch eine differentielle Massenbilanz um ein infinitesimales Element Δz, wie in Abb. 1 dargestellt, hergeleitet werden [11]. In Gl. (6) steht $w(t,z)$ für die Höhe des Schüttguts, z für die Ortskoordinate und v für die unbekannte, konstante Geschwindigkeit des Bands. Es wird angenommen, dass die Höhe des Schüttguts bei $z=0$ bzw. $z=L$ dem Systemeingang $w(t,0)=u(t)$ und Systemausgang $w(t,L)=y(t)$ entspricht und diese Größen messtechnisch (beispielsweise optisch) erfasst werden können. Für die Laplace-Transformation von Gl. (6) mit verschwindenden Anfangsbedingungen $w(z,0)=0$ gilt

$$v\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}W(s,z)+sW(s,z)=0. \tag{7}$$

Die Integration von Gl. (7) über den Ort und Auswertung der bekannten Messgrößen $w(t,0)=u(t)$ und $w(t,L)=y(t)$ führt auf die Ein-/Ausgangsbeziehung

$$Y(s)=\exp\left(-\frac{sL}{v}\right)U(s)=\exp\left(-s\tau\right)U(s). \tag{8}$$

Dies entspricht im Zeitbereich dem Totzeitglied $y(t)=u(t-\tau)$ mit der Totzeit $\tau={}^{L}\!/_{v}$. Für die Ableitung von Gl. (8) nach der komplexen Variable s gilt

$$Y'(s)=-\exp\left(-s\tau\right)\tau U(s)+\exp\left(-s\tau\right)U'(s). \tag{9}$$

Die auftretende transzendente Funktion der Fundamentallösung, in diesem Fall der Verschiebeoperator $\exp\left(-s\tau\right)$, kann eliminiert werden, indem Gl. (8) nach $\exp\left(-s\tau\right)$ aufgelöst und in Gl. (9) eingesetzt wird. Dadurch erhält man die Identifikationsgleichung im Bildbereich

$$Y'(s)U(s)=-\tau Y(s)U(s)+Y(s)U'(s). \tag{10}$$

Mithilfe der entsprechenden Korrespondenzen kann Gl. (10) in den Zeitbereich rücktransformiert und nach τ gelöst werden. Man erhält

$$\tau=\frac{(\bar{t}y*u)(t)-(y*\bar{t}u)(t)}{(y*u)(t)}, \tag{11}$$

mit der identischen Abbildung $\bar{t}:t\mapsto t$ sowie dem Faltungsprodukt $(y*u)$ von y und u. Die Auswertung von Gl. (11) für ein simuliertes Transportband mit einer Totzeit von $\tau=10\,\mathrm{s}$ und

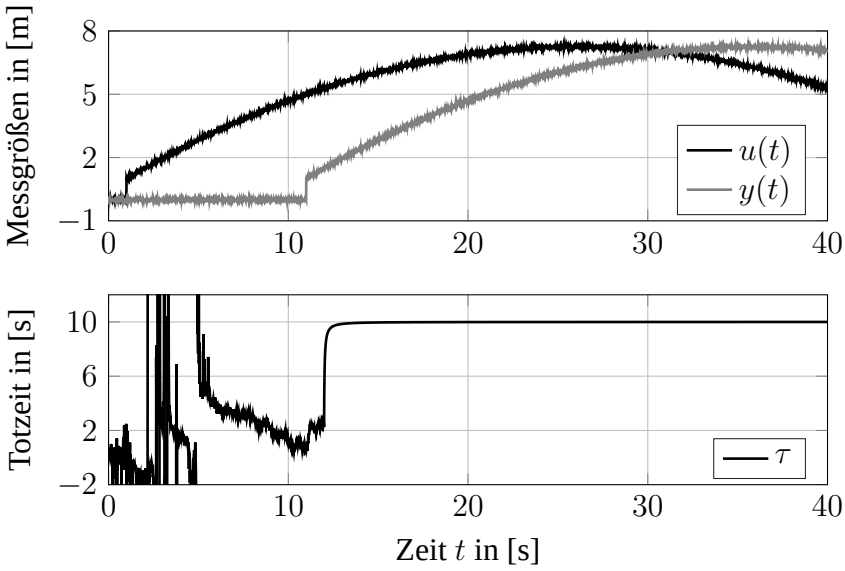

Abbildung 2: Identifikation der Totzeit nach Gl. (11)

verrauschten Messtrajektorien ist in Abb. 2 zu sehen.

Neben dem in [8] vorgestellten Zugang über die Laplace-Transformation, wurde in [12] gezeigt, dass die Herleitung der Identifikationsgleichung im Zeitbereich auch über die Theorie der Distributionen möglich ist, wodurch die Laplace-Transformation obsolet wird. Dieser Ansatz ist gültig für lineare Totzeit-Systeme. Zur Veranschaulichung wird im Folgendem die Lösung der Transportgleichung nach Gl. (6) verwendet.

Beispiel 3 (Totzeitsystem)

Die Ein-/Ausgangsbeziehung eines Totzeitglieds im Zeitbereich lautet

$$y(t) = u(t - \tau). \tag{12}$$

Das Eingangssignal erscheint daher, um die Totzeit verzögert, unverändert am Ausgang. Für die Faltungseigenschaft der Delta-Distribution $\delta(t - \tau) = \delta_\tau$ gilt $u(t - \tau) = (\delta_\tau * u)(t)$. Daher kann Gl. (12), multipliziert mit $(t - \tau)$, wie folgt dargestellt werden

$$(t - \tau)y(t) = (\delta_\tau * tu)\,(t). \tag{13}$$

Eine Faltung von Gl. (13) mit $u(t)$ ergibt

$$\big(\bar{t}y * u\big)\,(t) - \tau\big(y * u\big)(t) = \big(y * \bar{t}u\big)\,(t). \tag{14}$$

Durch Umformen der Gleichung nach dem unbekannten Parameter, der Totzeit τ, erhält man erneut Gl. (11). Da diese Vorgehensweise für partielle Differentialgleichungen allerdings auf Totzeit-Systeme beschränkt ist, wird nachfolgend die Laplace-Transformation zur Herleitung der Identifikationsgleichung verwendet.

Durch Gehring et al. konnte in [13] gezeigt werden, dass die algebraische Methode zur Parameteridentifikation auch auf örtlich eindimensionale, lineare partielle Differentialgleichungen

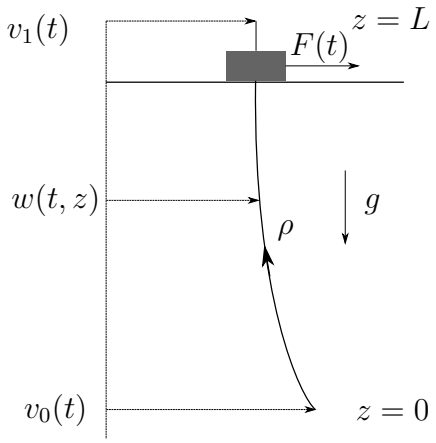

Abbildung 3: Schema des schweren Seils

mit örtlich verteilten Koeffizienten angewendet werden kann. Ein auf diese Weise beschriebenes System ist beispielsweise das schwere Seil, welches auch in [13] verwendet wurde. Eine typische Anwendung hierfür ist ein Brückenkran zum Materialtransport in einer Halle. Für ein schwingungsarmes Verfahren des Krans ist eine Steuerung [14] und damit die genaue Kenntnis der Parameter notwendig .

3 Parameteridentifikation für das schwere Seil

In diesem Abschnitt wird die algebraische Identifikationsgleichung für die unbekannte Seillänge L hergeleitet. Zusätzlich zur algebraischen Methode wird ein Early-Lumping-Ansatz zur Parameteridentifikation für verteilt-parametrische Systeme vorgestellt. Das Vorgehen beruht auf einer Approximation der Ortsableitungen durch die Methode der finiten Differenzen. Die Seillänge L wird anschließend mithilfe einer numerischen Optimierung bestimmt.

3.1 Modell des schweren Seils

Beim betrachteten System handelt es sich um einen horizontal verfahrbaren Wagen, an den ein homogenes schweres Seil mit der konstanten Länge L und der Liniendichte ρ angehängt ist. Das Seil bewegt sich in einer vertikalen Ebene unter dem Einfluss der Erdbeschleunigung $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Die horizontale Auslenkung des Seils wird durch die kontinuierliche Funktion $w(t,z)$ mit der krummlinigen Koordinate z beschrieben. Für die messbare Auslenkung am unteren, freien Ende gilt $w(t,0) = v_0(t)$ und für die messbare Auslenkung am oberen Ende, d.h. für die Position des Wagens, gilt $w(t,L) = v_1(t)$. Eine schematische Übersicht des Versuchsaufbaus ist in Abb. 3 zu sehen.

Die Bewegungsgleichungen dieses Systems können durch das von Hamilton eingeführte Prinzip der kleinsten Wirkung hergeleitet werden. Unter der Annahme von kleinen Auslenkungen und der Vernachlässigung von Reibung erhält man die folgende Gleichung für die Dynamik des schweren Seils

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(P(z)\frac{\partial}{\partial z}w(t,z)\right) - \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}w(t,z) = 0, \qquad t \in [0,\infty[, \quad z \in [0,L], \tag{15}$$

wobei

$$P(z) = g\rho z \tag{16}$$

die Gewichtskraft im Seils ist. Des Weiteren werden homogene Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} w(0,z) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} w(t,z)\bigg|_{t=0} &= 0 \end{aligned} \tag{17}$$

vorausgesetzt.

3.2 Herleitung der algebraischen Identifikationsgleichung

Für die Identifikation der unbekannten Seillänge L kann eine algebraische Identifikationsgleichung, welche den unendlich-dimensionalen Lösungsraum[2] des in Gl. (15) formulierten Problems berücksichtigt, hergeleitet werden. Das Vorgehen hierbei ist äquivalent zu der Methodik aus [8], welche in Abschnitt 2 vorgestellt wurde.

Die Anwendung der Laplace-Transformation auf Gl. (15) ergibt die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(P(z)\frac{\partial}{\partial z}W(s,z)\right) - \rho s^2 W(s,z) = 0, \qquad t \in [0,\infty[, \quad z \in [0,L]. \tag{18}$$

Mithilfe der Koordinatentransformation

$$x = f(z) = 2s\sqrt{\frac{z}{g}} \tag{19}$$

kann Gl. (18) als modifizierte Bessel-Gleichung nullter Ordnung geschrieben werden. Diese ist definiert als

$$x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\overline{W}(s,x) + \frac{\partial}{\partial x}\overline{W}(s,x) - \overline{W}(s,x) = 0. \tag{20}$$

Aus dem bekannten Lösungsansatz für Gl. (20) [15] erhält man mit

$$W(s,z) = c_1(s)I_0(f(z)) + c_2(s)K_0(f(z)) \tag{21}$$

den Lösungsansatz für Gl. (18). Hierbei sind $I_0(\cdot)$ und $K_0(\cdot)$ die modifizierten Bessel-Funktionen nullter Ordnung und erster bzw. zweiter Art. Da

$$K_0(f(z)) \xrightarrow{z\to 0} \infty \tag{22}$$

gilt, muss $c_2(s) = 0$ sein, so dass die Auslenkung am unteren Ende des Seils beschränkt ist. Damit ergibt sich für $z = 0$, mit $I_0(0) = 1$ und der Messgröße $w(t,0) = v_0(t)$, die Gleichung

$$W(s,0) = V_0(s) = c_1(s). \tag{23}$$

Durch die Auswertung der Randbedingung $w(t,L) = v_1(t)$ kann das Ein-/Ausgangsverhalten im Bildbereich, also der Zusammenhang zwischen der gemessenen oberen Auslenkung $v_1(t)$ und der gemessenen unteren Auslenkung $v_0(t)$, wie folgt angegeben werden

$$V_1(s) = V_0(s)I_0(\alpha s) \quad \text{mit} \quad \alpha = 2\sqrt{\frac{L}{g}}. \tag{24}$$

[2] Zum Beispiel wird Gl. (6) von jeder auf $D \in \mathbb{R}$ reellwertigen, stetig differenzierbaren Funktion, d.h. $f \in \mathcal{C}^1(D)$, erfüllt. Die Dimension dieses Funktionenraums ist unendlich.

Da die Bessel-Funktion nullter Ordnung und erster Art, welche in Gl. (24) als transzendente Funktion in s auftritt, durch

$$I_0''(\alpha s) = \alpha^2 \left(I_0(\alpha s) - \frac{1}{\alpha^2 s} I_0'(\alpha s) \right) \tag{25}$$

einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung bezüglich s genügt, kann sie eliminiert werden. Hierzu wird Gl. (24) sowie die erste und zweite Ableitung von Gl. (24) bezüglich s jeweils nach $I_0(\alpha s)$, $I_0'(\alpha s)$ und $I_0''(\alpha s)$ aufgelöst und anschließend in Gl. (25) eingesetzt. Es kann so die algebraische Identifikationsgleichung

$$Y_1(s) = \alpha^2 Y_2(s), \tag{26}$$

mit den Signalen

$$\begin{aligned} Y_1(s) = &\left(s^{-1}V_0(s) - 2V_0'(s)\right)\left(V_0(s)V_1'(s) - V_0'(s)V_1(s)\right) \\ &+ V_0(s)\left(V_0(s)V_1''(s) - V_0''(s)V_1(s)\right) \end{aligned} \tag{27a}$$

$$Y_2(s) = V_0(s)V_0(s)V_1(s), \tag{27b}$$

hergeleitet werden. Die Rücktransformation der Signale aus Gl. (27a) und Gl. (27b) in den Zeitbereich ergibt

$$\begin{aligned} y_1(t) = &\left(v_0 * v_0 * \overline{t}^2 v_1\right)(t) - \left(v_0 * \overline{t}^2 v_0 * v_1\right)(t) \\ &- 2\left(\overline{t} v_0 * v_0 * \overline{t} v_1\right)(t) \\ &+ \int_0^t \left(v_0 * \overline{t} v_0 * v_1 - v_0 * v_0 * \overline{t} v_1\right)(\sigma)\mathrm{d}\sigma \end{aligned} \tag{28a}$$

$$y_2(t) = \left(v_0 * v_0 * v_1\right)(t), \tag{28b}$$

mit der identischen Abbildung $\overline{t} : t \mapsto t$. Damit kann Gl. (26) im Zeitbereich nach dem unbekannten Parameter L aufgelöst und wie folgt geschrieben werden

$$L = \frac{g}{4}\frac{y_1}{y_2}. \tag{29}$$

3.3 Diskretisierung durch die Methode der finiten Differenzen

Das Ergebnis der algebraischen Methode zur Parameteridentifikation soll quantitativ und qualitativ mit einem Early-Lumping-Ansatz verglichen werden. Hierfür wird im Folgenden ein endlich-dimensionales Modell des schweren Seils, basierend auf einer Approximation von Gl. (15) durch die Methode der finiten Differenzen, hergeleitet [16].

Für das konzentriert-parametrische Modell des schweren Seils wird die kontinuierliche Abhängigkeit der verteilten Zustandsgröße vom Ort vernachlässigt und die Annahme getroffen, dass die Dynamik durch eine endliche Anzahl gewöhnlicher Differentialgleichungen beschrieben werden kann. Diese approximieren die jeweilige diskrete Auslenkung des Seils $w^1, \ldots, w^N$ an N Knotenpunkten. Dafür werden die in Gl. (15) auftretenden örtlichen Ableitungen durch die Differenzenquotienten

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} w(t,z) &\approx \frac{w^{n+1}(t) - w^{n-1}(t)}{2h}, \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} w(t,z) &\approx \frac{w^{n+1}(t) - 2w^n(t) + w^{n-1}(t)}{h^2} \end{aligned} \tag{30}$$

an den jeweiligen Knoten $n = 1 \dots N$ ersetzt. Hierbei ist $w^n(t)$ die Auslenkung am Knoten n zum Zeitpunkt t und $h = \Delta z$ die örtliche Schrittweite. Damit kann folgendes Gleichungssystem aufgestellt werden

$$1 \leq n \leq N: \quad \dot{w}^n = w^{N+n} \tag{31a}$$

$$\ddot{w}^1 = \ddot{w}^2 \tag{31b}$$

$$1 < n < N: \quad \ddot{w}^n = g\frac{2n-1}{2h}w^{n+1} - 2g\frac{n-1}{h}w^n + g\frac{2n-3}{2h}w^{n-1} + \alpha g\frac{2n-1}{2h}\dot{w}^{n+1} - 2\alpha g\frac{n-1}{h}\dot{w}^n + \alpha g\frac{2n-3}{2h}\dot{w}^{n-1} \tag{31c}$$

$$\ddot{w}^N = \ddot{v}_1 = u, \tag{31d}$$

in welchem die Notation $\dot{w}^n$ und $\ddot{w}^n$ für die erste und zweite zeitliche Ableitung von w^n nach der Zeit t steht. Das Gleichungssystem (31a) - (31d) kann somit in einer Zustandsraumdarstellung der Form

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{w}} \\ \ddot{\boldsymbol{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{w} \\ \dot{\boldsymbol{w}} \end{bmatrix} + \boldsymbol{e}_{2N} u \tag{32}$$

geschrieben werden. $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w^1 & \dots & w^n \end{bmatrix}^T$ ist der Vektor mit der jeweiligen diskreten Auslenkung, $\dot{\boldsymbol{w}} = \begin{bmatrix} \dot{w}^1 & \dots & \dot{w}^n \end{bmatrix}^T$ und $\ddot{\boldsymbol{w}} = \begin{bmatrix} \ddot{w}^1 & \dots & \ddot{w}^n \end{bmatrix}^T$ die erste und zweite zeitliche Ableitung von $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{0}$ die Nullmatrix, $\boldsymbol{I}$ die Identitätsmatrix, $\boldsymbol{e}_{2N}$ der Einheitsvektor und $\boldsymbol{A}$ berücksichtigt den Zusammenhang in Gl. (31b) - (31d). Das System in Gl. (32) kann mit Methoden für lineare, zeitinvariante Differentialgleichungssysteme effizient integriert und ausgewertet werden [17]. Dadurch kann der gesuchte Parameter L^*, bei welchem das quadratische Mittel der Abweichung zwischen der Messgröße $v_{0,\text{mess}}(t_i) = w_{\text{mess}}(t_i, 0)$ und dem simulierten Wert $w^1(t_i)$ über eine Anzahl von m diskreten Zeitpunkten minimal wird, iterativ anhand einer numerische Optimierung ermittelt werden. Mathematisch wird dieses Vorgehen wie folgt beschrieben

$$L^* = \arg\min_L \left(\sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{n} \left(v_{0,\text{mess}}(t_i) - w^1(t_i)\right)^2} \right). \tag{33}$$

4 Ergebnisse der Parameteridentifikation

Für die Auswertung der in Abschnitt 3 hergeleitet Methoden werden experimentelle Daten vom Prüfstand „Schwere Kette“ des Lehrstuhls für Regelungstechnik der Technischen Universität München verwendet. Die schwere Kette der Länge $L = 1.1780\,\text{m}$ kann für kleine Auslenkungen als schweres Seil angenähert und daher durch Gl. (15) beschrieben werden. Die Kette wird durch ein Kamerasystem erfasst, wodurch mithilfe der computergestützten Auswertung der Bilder der transiente Verlauf der Auslenkungen an den jeweiligen Knotenpunkten bestimmt werden kann.

4.1 Algebraische Methode

Für die Bestimmung der Seillänge L mithilfe der algebraischen Methode aus Abschnitt 3.2 wird Gl. (29) zu jedem Zeitpunkt t_i, an dem eine Messung vorliegt, ausgewertet[3]. Das Ergebnis hiervon sowie die gemessenen Trajektorien sind in Abb. 4 dargestellt.

[3]Die Faltung der diskreten Messsignale erfolgt durch den Algorithmus der schnellen Faltung, d.h. über die schnelle Fourier-Transformation.

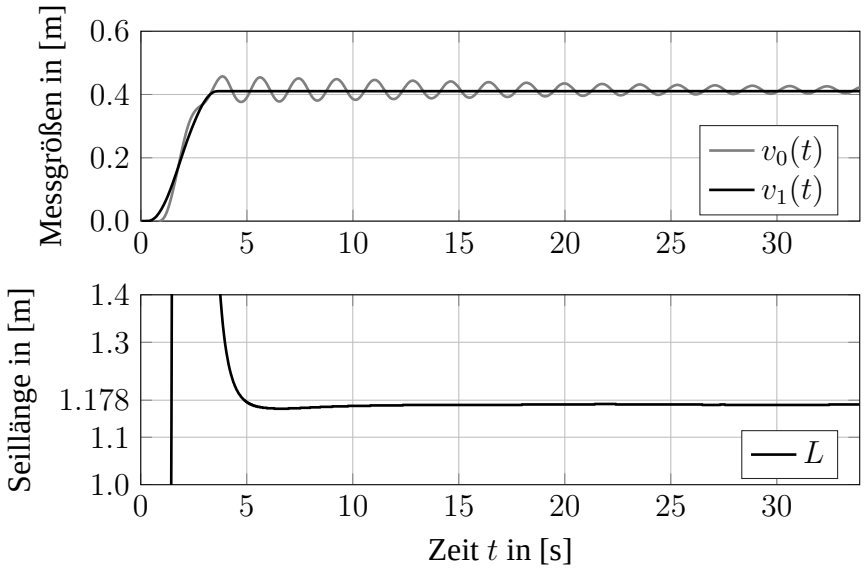

Abbildung 4: Identifikation der Seillänge durch die algebraische Methode

Da es sich beim schweren Seil um eine hyperbolische partielle Differentialgleichung handelt, kann die Seillänge L erst nach Verstreichen der Totzeit $\tau = 2\sqrt{L/g} = 0.693\,\mathrm{s}$ identifiziert werden. Durch Modellungenauigkeiten, die rauschbehaftete, zeitdiskrete Messung und die aus der numerischen Integration von Gl. (28a) und Gl. (28b) entstehenden Fehler ist der transiente Verlauf des identifizierten Parameters L asymptotisch. Es sei darauf hingewiesen, dass die algebraische Methode in der Theorie kein konvergierendes Verfahren ist und die hergeleitete Identifikationsgleichung (29) den unendlich-dimensionalen Lösungsraum berücksichtigt und deshalb keine Approximation darstellt. Zum Zwecke einer eindeutigen Notation wird die praktisch identifizierte Seillänge daher mit $\hat{L}$ bezeichnet. Der hierfür ermittelte Wert beträgt $\hat{L} = 1.1682\,\mathrm{m}$. Dies ist der häufigste, auf vier Nachkommastellen gerundete Wert, der in Abb. 4 auftritt. Dieses Vorgehen bei der Ermittlung von $\hat{L}$ ist sinnvoll, da die Seillänge ein zeitinvarianter Parameter ist und daher konstant sein muss. Die relative Genauigkeit, welche wie folgt definiert ist

$$\Gamma = 1 - \frac{|L - L_{\text{ident}}|}{L}, \tag{34}$$

beträgt $\Gamma_{\text{alg}} = 99.17\,\%$.

Der Verlauf der reibungsbehafteten gemessenen Auslenkung $v_{0,\text{mess}}(t)$ sowie der Verlauf der mit dem identifizierten Parameter $\hat{L}$ reibungsfrei simulierten Auslenkung $v_{0,\text{sim}}(t)$ ist in Abb. 5 dargestellt. Die Rechenzeit für die Identifikation beträgt $\delta_{\text{alg}} = 0.0231\,\mathrm{s}$ und das quadratische Mittel der Abweichung zwischen der gemessenen Größe $v_{0,\text{mess}}(t_i)$ und der mit $\hat{L}$ simulierten Größe $w^1_{\hat{L}}(t_i)$, welches wie folgt berechnet werden kann

$$\mathrm{RMSD} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\left(v_{0,\text{mess}}(t_i) - w^1_{\hat{L}}(t_i)\right)^2}, \tag{35}$$

beträgt $\mathrm{RMSD}_{\text{alg}} = 0.5571\,\mathrm{m}$.

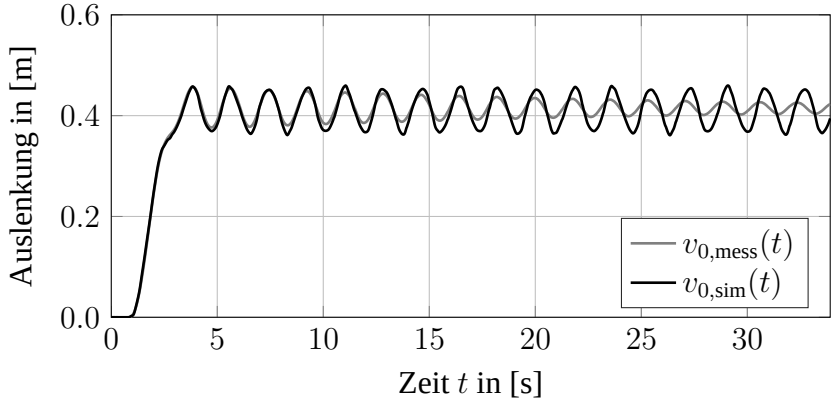

Abbildung 5: Vergleich der gemessenen und mit $\hat{L}$ simulierten Trajektorie der unteren Auslenkung des schweren Seils

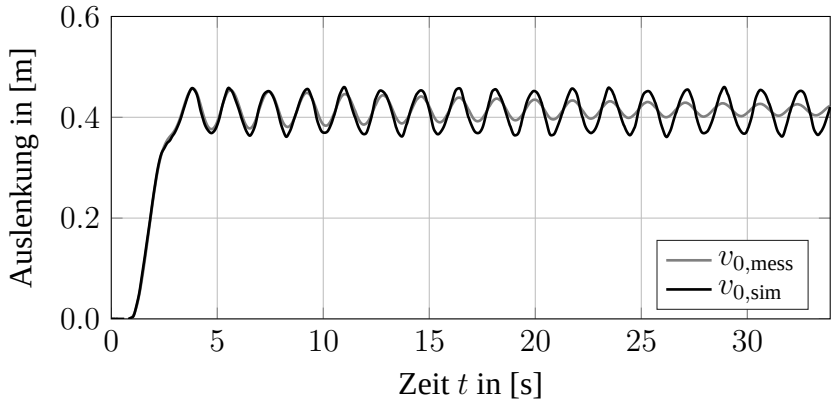

Abbildung 6: Vergleich der gemessenen und mit L^* simulierten Trajektorie der unteren Auslenkung des schweren Seils

4.2 Finite Differenzen Methode

Die in Abschnitt 3.3 vorgestellte Methode der finiten Differenzen basiert auf einer Optimierung, welche die Abweichung zwischen der gemessenen und simulierten Trajektorie minimiert. Da im Modell des schweren Seils Gl. (15) keine Reibung berücksichtigt wird, ist das Ergebnis dieses Ansatzes stark von der zeitlichen Länge der Messung abhängig.

Für die in Abb. 4 verwendeten Messtrajektorien wird durch die Auswertung von Gl. (33) mithilfe eines genetischen Algorithmus [18] ein Wert von $L^* = 1.1536\,\text{m}$ berechnet. Die hierfür benötigte Rechenzeit beträgt $\delta_{\text{FD}} = 283.49\,\text{s}$ und die Knotenzahl $N = 100$. Als obere und untere Schranke der Seillänge wurde $L_{\text{lb}} = 0.1\,\text{m}$ bzw. $L_{\text{ub}} = 10\,\text{m}$ verwendet. Die relative Genauigkeit nach Gl. (34) beträgt damit $\Gamma_{\text{FD}} = 97.93\,\%$. Das quadratische Mittel der Abweichung ist mit $\text{RMSD}_{\text{FD}} = 0.4745\,\text{m}$ erwartungsgemäß geringer als RMSD_{alg}. Der Verlauf der Auslenkungen ist in Abb. 6 zu sehen.

Die Resultate der Methode der finiten Differenzen nach Abschnitt 3.3 können jedoch durch die Wahl eines kürzeren Messzeitraums und/oder einer Modellierung des schweren Seils durch ein reibungsbehaftetes Modell stark verbessert werden. Bei einer Verkürzung der Messung auf

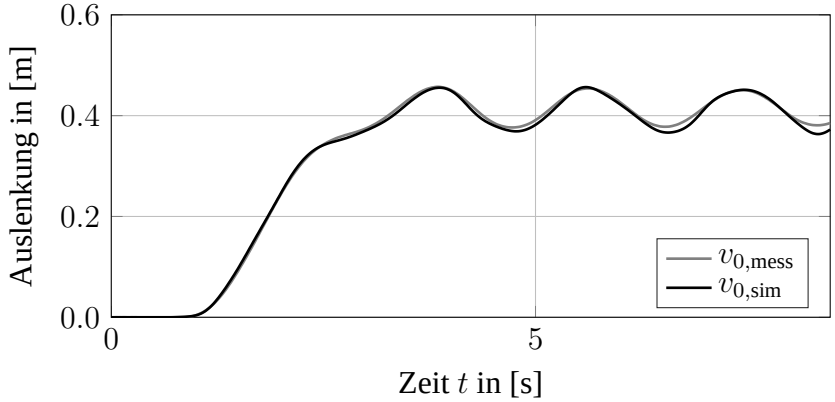

Abbildung 7: Vergleich der gemessenen und mit L_{k}^* simulierten Trajektorie der unteren Auslenkung des schweren Seils

Tabelle 1: Gegenüberstellung der präsentierten Ergebnisse

algebraische Methode	Finite Differenzen 1	Finite Differenzen 2
$\delta_{\text{alg}} = 0.0231\,\text{s}$	$\delta_{\text{FD}} = 283.49\,\text{s}$	$\delta_{\text{FD,k}} = 117.54\,\text{s}$
$\hat{L} = 1.1682\,\text{m}$	$L^* = 1.1536\,\text{m}$	$L_{\text{k}}^* = 1.1754\,\text{m}$
$\Gamma_{\text{alg}} = 99.17\,\%$	$\Gamma_{\text{FD}} = 97.93\,\%$	$\Gamma_{\text{FD,k}} = 99.78\,\%$
$\text{RMSD}_{\text{alg}} = 0.5571\,\text{m}$	$\text{RMSD}_{\text{FD}} = 0.4745\,\text{m}$	$\text{RMSD}_{\text{FD,k}} = 0.0166\,\text{m}$

$8.47\,\text{s}$ wird die Seillänge, bei einer Rechenzeit von $\delta_{\text{FD,k}} = 117.54\,\text{s}$, mit $L_{\text{k}}^* = 1.1754\,\text{m}$ identifiziert[4]. Dies entspricht einer relativen Genauigkeit von $\Gamma_{\text{FD,k}} = 99.78\,\%$. Das quadratische Mittel der Abweichung beträgt $\text{RMSD}_{\text{FD,k}} = 0.0166\,\text{m}$. Abb. 7 zeigt jeweils den Verlauf der gemessenen und simulierten Trajektorie für die verkürzte Messung. Damit repräsentieren diese Resultate das exakteste von den drei vorgestellten Ergebnissen, welche in Tab. 1 zusammengefasst sind.

5 Zusammenfassung

In diesem Beitrag wurde die Anwendung und Weiterentwicklung der algebraischen Methode zur Parameteridentifikation durch unterschiedliche Autoren vorgestellt und anhand von Beispielen erläutert. Der Schwerpunkt lag auf der Herleitung und experimentellen Auswertung der algebraischen Identifikationsgleichung für das System des schweren Seils. Zusätzlich zu diesem Ansatz wurde zu Vergleichszwecken die Seillänge mithilfe einer numerischen Optimierung, basierend auf der Approximation des Systems durch die Methode der finiten Differenzen, bestimmt. Es konnte gezeigt werden, dass die benötigte Rechenzeit für die Auswertung der algebraischen Identifikationsgleichung um Größenordnungen kleiner ist, als die Rechenzeit für die numerische Optimierung. Die algebraische Methode ist daher vielversprechend für eine adaptive Regelung, bei welcher gewisse Parameter a priori unbekannt sind und in Echtzeit geschätzt werden müssen. Des Weiteren wurde für das Beispiel des schweren Seils beobachtet, dass das Vernachlässigen der Reibung in der Modellierung die Güte des Ergebnisses der

[4]Der Index k steht für die *kurze* Messung.

algebraische Methode geringer beeinträchtigt als bei der numerischen Optimierung. Dennoch kann durch die numerische Optimierung, bei Verwendung einer kurzen Messung, die Seillänge am genauesten identifiziert werden. Für weitere Untersuchungen sollte das Modell um einen Reibungsterm [19] erweitert werden.

Die algebraische Methode zur Parameteridentifikation kann bei einfachen, örtlich eindimensionalen Systemen, welche aus der Ruhe heraus angeregt werden, vorteilhaft gegenüber herkömmlichen Methoden sein. Dies liegt einerseits an der kurzen Rechenzeit und andererseits daran, dass keine geschätzten Startwerte vorgegeben werden müssen. Für komplexere Systeme ist es, aufgrund des hohen symbolischen Berechnungsaufwands, unter Umständen nicht mehr möglich eine Identifikationsgleichung herzuleiten. Falls dies dennoch gelingt, ist das entstehende Polynom in dieser von hohem Grad mit einer entsprechenden Anzahl an Nullstellen. Die Lösungen des Polynoms sind allerdings, bei Verwendung von Messdaten, oftmals zeitvariant, weswegen der Wert, welcher dem wahren Wert am ehesten entspricht, nur bei ungefährer Kenntnis des zu identifizierenden Parameters bestimmt werden kann. Eine Verbesserung dieses Problems kann eventuell durch die Entwicklung von geeigneten numerischen Verfahren zur Lösung der Identifikationsgleichung erreicht werden. Darüber hinaus sollte die simultane Identifikation von mehreren Parametern sowie das Vorgehen beim Generieren weiterer Gleichungen aus der Identifikationsgleichung, welche in diesem Fall oder bei einer Überparametrierung des Problems benötigt werden, Gegenstand zukünftiger Forschung sein.

Danksagung: Der Autor dankt Dipl.-Ing. Nicole Gehring und Dr.-Ing. Paul Kotyczka für die wertvollen Diskussionen.

Literatur

[1] SMYSHLYAEV, Andrey ; KRSTIC, Miroslav: *Adaptive control of parabolic PDEs*. Princeton University Press, 2010

[2] TRÖLTZSCH, Fredi: *Optimal control of partial differential equations: theory, methods, and applications*. American Mathematical Soc., 2010

[3] BAUMEISTER, Johann: *Stable Solution of Inverse Problems*. Vieweg+Teubner Verlag, 1987

[4] DEUTSCHER, Joachim: *Zustandsregelung verteilt-parametrischer Systeme*. Springer, 2012

[5] LJUNG, Lennart: *System identification: Theory for the user*. 2. Auflage. Prentice Hall, 1999

[6] SÖDERSTRÖM, Torsten ; STOICA, Petre: *System identification*. Prentice-Hall, Inc., 1988

[7] ISAKOV, Victor: *Inverse problems for partial differential equations*. Springer, 2006

[8] RUDOLPH, Joachim ; WOITTENNEK, Frank: Ein algebraischer Zugang zur Parameteridentifikation in linearen unendlichdimensionalen Systemen. In: *at - Automatisierungstechnik* 55 (2007), Nr. 9, S. 457–467

[9] FLIESS, Michel ; SIRA-RAMÍREZ, Hebertt: An algebraic framework for linear identification. In: *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations* 9 (2003), S. 151–168

[10] FÖLLINGER, Otto: *Laplace-, Fourier- und z-Transformation*. 7. Auflage. Hüthig, 2000

[11] FRANKE, Dieter: *Systeme mit örtlich verteilten Parametern*. Springer-Verlag, 1987

[12] BELKOURA, Lotfi ; RICHARD, Jean-Pierre ; FLIESS, Michel: A convolution approach for delay systems identification. In: *17th IFAC World Congress* Bd. 17, 2008

[13] GEHRING, Nicole ; KNÜPPEL, Torsten ; RUDOLPH, Joachim ; WOITTENNEK, Frank: Algebraische Methoden zur Parameteridentifikation für das schwere Seil. In: *at - Automatisierungstechnik* 60 (2012), Nr. 9, S. 514–521

[14] PETIT, Nicolas ; ROUCHON, Pierre: Flatness of heavy chain systems. In: *SIAM Journal on Control and Optimization* 40 (2001), Nr. 2, S. 475–495

[15] ABRAMOWITZ, Milton ; STEGUN, Irene: *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications (Applied mathematics series), 1964

[16] TALIC, Emir ; SCHIRRER, Alexander ; KOZEK, Martin ; JAKUBEK, Stefan: Multi-objective parameter identification of Euler–Bernoulli beams under axial load. In: *Journal of Sound and Vibration* 341 (2015), S. 86–99

[17] BUTCHER, John C.: *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. 2. Auflage. John Wiley & Sons, 2008

[18] GOLDBERG, David E.: *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. 1st. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1989

[19] GEHRING, Nicole ; KNÜPPEL, Torsten ; RUDOLPH, Joachim ; WOITTENNEK, Frank: Parameter identification for a heavy rope with internal damping. In: *PAMM* 12 (2012), Nr. 1, S. 725–726