

Polar Coding: Finite-Length Aspects

Aspekte von Polar Coding mit endlichen Blocklängen

Der Technischen Fakultät der
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
zur Erlangung des Doktorgrades Dr.-Ing.

vorgelegt von

MATHIS JOHANNES SEBASTIAN SEIDL

aus Weiden i.d. Opf.

Als Dissertation genehmigt von der Technischen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der mündlichen Prüfung: 19.02.2015

Vorsitzende des Promotionsorgans: Prof. Dr.-Ing. Marion Merklein

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Johannes Huber
Prof. Dr.-Ing. Martin Bossert

Erlanger Berichte aus Informations- und Kommunikationstechnik

Band 36

Mathis Seidl

Polar Coding: Finite-Length Aspects

D 29 (Diss. Universität Erlangen-Nürnberg)

Shaker Verlag
Aachen 2015

Bibliographic information published by the Deutsche Nationalbibliothek

The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available in the Internet at <http://dnb.d-nb.de>.

Zugl.: Erlangen-Nürnberg, Univ., Diss., 2015

Copyright Shaker Verlag 2015

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the prior permission of the publishers.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-3533-9

ISSN 1619-8506

Shaker Verlag GmbH • P.O. BOX 101818 • D-52018 Aachen

Phone: 0049/2407/9596-0 • Telefax: 0049/2407/9596-9

Internet: www.shaker.de • e-mail: info@shaker.de

Dedicated to Melanie

Danksagung

Selbstverständlich gilt mein Dank an erster Stelle meinem akademischen Lehrer Prof. Dr.-Ing. Johannes Huber, der in unzähligen Gesprächen und Diskussionen diese Arbeit und meinen wissenschaftlichen Werdegang maßgeblich geprägt hat. Ich hätte mir keinen besseren Mentor wünschen können.

Weiterhin möchte ich mich bei meinen ehemaligen Kollegen am LIT für die schöne gemeinsame Zeit und die gute Zusammenarbeit herzlich bedanken und wünsche ihnen alles erdenkliche Gute für ihre Zukunft.

Besonders bedanke ich mich bei Michael Cyran, Jakob Rettelbach, Clemens Stierstorfer und Andreas Schenk für gemeinsame Publikationen und (nicht nur fachwissenschaftliche) Diskussionen.

Kurzfassung

In dieser Dissertation wird ein erstmalig 2008 unter dem Namen *Polar Coding* vorgestelltes, neuartiges Verfahren zur blockbasierten Kanalcodierung untersucht.

Im Unterschied zu etlichen Arbeiten über Polar Coding, die die asymptotischen Eigenschaften dieser Codierungsmethode für sehr große Blocklängen zum Gegenstand haben, legen wir hier den Schwerpunkt auf den praxisrelevanten Fall von Codes mit endlichen Blocklängen.

Wir diskutieren verbesserte Ansätze zur Decodierung und untersuchen verschiedene Möglichkeiten der Verkettung von Polar Codes mit anderen codierungstheoretischen Konstruktionen. In diesem Zusammenhang vergleichen wir die Eigenschaften und die Leistungsfähigkeit von Polar Codes mit diversen in heutigen Kommunikationsstandards implementierten Methoden der Kanalcodierung.

Des weiteren entwickeln wir ein effizientes Verfahren zur Verwendung von binären Polar Codes in Verbindung mit mehrstufigen Modulationsverfahren für erhöhte Bandbreiteneffizienz, das auf dem Konzept der codierten Modulation basiert.

Dieser Arbeit liegen mehrere, im Anhang detailliert aufgeführte wissenschaftliche Publikationen [SH10, KSH11, SSSH13a, SSSH13b, SSSH13c, SH14] zugrunde.

Contents

Kurzfassung (in German)	i
1 Introduction and Outline	1
2 Foundations and Basic Concepts	5
2.1 Channel Model	5
2.1.1 Discrete memoryless channels	5
2.1.2 Binary-input symmetric memoryless channels	7
2.2 Channel Combining	11
2.2.1 Elementary Operations	11
2.2.2 Equivalent Representations	14
2.2.3 Tanner Graphs and Iterative Decoding	16
3 Polar Coding	19
3.1 Basic Properties	19
3.2 Optimal Selection of Frozen Indices	23
3.3 Asymptotic Properties	31
3.4 Relation to Reed-Muller Codes	32
3.5 Improved Decoding Algorithms	33
3.5.1 Maximum-Likelihood (ML) Decoding	33
3.5.2 Successive Cancellation List (SCL) Decoding	33
3.5.3 Iterative Belief Propagation (BP) Decoding	34
3.5.4 Decoder Comparison	35
3.6 Generalized Code Constructions	37
3.6.1 Constructions Based on Alternative Binary Kernels	37

3.6.2	Non-Binary Polar Coding	37
4	Polar Codes in Concatenated Code Designs	39
4.1	Product Codes from Polar Codes	39
4.1.1	Consecutive Inner and Outer Decoding	40
4.1.2	Interleaved Inner and Outer Decoding	43
4.2	Length-Preserving Code Concatenations	44
4.2.1	Serial Concatenation with Outer Error-Detecting Codes	44
4.2.2	Serial Concatenation with Outer Repetition Codes	44
5	Polar-Coded Modulation	51
5.1	Channel Partitioning	51
5.1.1	Sequential Partitioning	51
5.1.2	Product Concatenation of SBPs	53
5.1.3	Parallel Partitioning	55
5.1.4	Concatenation of PBPs	56
5.2	Application to Binary Polar Coding	57
5.3	Application to Coded Modulation	60
5.3.1	Multilevel Coding	60
5.3.2	Bit-Interleaved Coded Modulation	63
5.4	Multilevel Polar Coding	64
5.5	Bit-Interleaved Polar-Coded Modulation	67
5.5.1	Transformation of Labelings	68
5.5.2	Code Modification	71
5.6	Simulation Results	72
6	Concluding Remarks	79
A	Appendix	81
A.1	Proof of (2.37)	81
A.2	Formulas for Information Combining	82
A.3	Proof of (2.49)	84
A.4	Proof of (5.39)	85
A.5	Proof of (5.43)	86

A.6	Proof of (5.63)	87
A.7	Collaborative Decoding of Reed-Solomon Codes	87
A.7.1	Reed-Solomon Codes and Interleaving	88
A.7.2	Collaborative Decoding	89
A.7.3	Code word reconstruction	91
A.7.4	Failure probability	92
A.7.5	Complexity	92
B	Notation	93
B.1	Abbreviations	93
B.2	Mathematical Symbols	94
	Bibliography	99