

DIPLOMARBEIT

Space-Time Tree-Based Adaptive Wavelet Methods for Parabolic PDEs

(Raum-Zeit-Baum-basierte adaptive Waveletmethoden
für parabolische PDEs)

Angefertigt am
Institut für Mathematik

Vorgelegt der
Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik der
UNIVERSITÄT PADERBORN

März 2011

von

Florian Stapel

aus

Herford

Erstgutachter: Prof. Dr. Angela Kunoth
Zweitgutachter: Prof. Dr. Rob Stevenson

Erklärung

Hiermit versichere ich, Florian Stapel, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe, dass alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß anderen Quellen übernommen wurden, als solche kenntlich gemacht worden sind, und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt wurde.

Paderborn, den 22. März 2011

Zusammenfassung

Diese Diplomarbeit beschäftigt sich mit der numerischen Behandlung linearer parabolischer partieller Differentialgleichungen. Sie basiert auf einem von C. Schwab und R. Stevenson 2009 in [42] vorgestellten Ansatz, in dem eine schwache Raum-Zeit-Formulierung des parabolischen Problems gegeben und mit einer geeigneten Wavelet-Basis äquivalent als unendlich-dimensionales lineares Gleichungssystem reformuliert wurde. Ausgehend von diesem Folgenraum-Problem wurde ein adaptives Verfahren zur Lösung der assoziierten Operatorgleichung in asymptotisch optimaler Komplexität angegeben. Als Besonderheit dieses neuartigen Ansatzes wird ein time-stepping vermieden, was ein völlig neues, vorteilhaftes Paradigma für adaptive Methoden zeitabhängiger PDEs darstellt.

Die Arbeit behandelt die Untersuchung und Entwicklung des obigen Ansatzes in einem für Waveletmethoden elliptischer partieller Differentialgleichungen etablierten Rahmen. Dieser Rahmen beinhaltet die Verwendung isotroper Tensorprodukt-Wavelet-Basen. Im Unterschied zu den in [42] benutzten anisotropen Basen bieten diese eine Reihe theoretischer und praktischer Vorteile für die numerische Lösung von Operatorgleichungen, auch wenn die zugehörige Theorie im Hinblick auf die verwendeten Funktionenräume eine anisotrope Struktur aufweist. Insbesondere wurde somit die Möglichkeit gegeben, für das hier behandelte Problem die von J. Vorloeper zu seiner Dissertation [48] 2009 an der RWTH Aachen entwickelte AWM-Toolbox zu verwenden. Dieses ist derzeit das einzig verfügbare Programmpaket zur Implementation adaptiver Waveletmethoden, mit dem zweidimensionale Probleme behandelt werden können. Numerische Ergebnisse mit einer im Rahmen dieser Arbeit entstandenen Weiterentwicklung der AWM-Toolbox, die zudem eine in dieser Arbeit eingeführte Homogenisierung der ursprünglichen Formulierung nutzen, bestätigen Konvergenzraten, die von der Theorie adaptiver Waveletmethoden für elliptische Probleme her zu erwarten sind.

Aus theoretischer Sicht beinhaltet die Arbeit neben der Umformulierung des ursprünglichen Problems aus [42] zu einem homogenisierten Problem mit einer implementatorisch einfacheren Struktur weitere Aspekte. Da schon bei der Formulierung des Problems vektorwertige Varianten der bekannten Sobolev-Räume benötigt werden, werden zudem für die Theorie wichtige funktionalanalytische Aspekte, vor allem zum Tensor-Produkt von Hilbert-Räumen, detailliert ausgearbeitet. Die dabei entstandene Darstellung beruht auf mehreren Quellen und bildet einen abgeschlossenen ersten Teil der Arbeit. Als Ergänzung dieses theoretischen Teils wird ein Resultat zum Tensorprodukt von Isometrien formuliert und bewiesen.

Im Hauptteil der Arbeit werden Algorithmen und Konzepte vorgestellt, die auf sogenannten Baumstrukturierten Index-Mengen/Wavelet-Basen arbeiten. Diese Methoden bilden wichtige Bestandteile zur adaptiven Lösung der fortan betrachteten Variante des ursprünglichen Problems. Es werden grundlegende Konzepte zu Wavelet-Basen und Tensorierung ausgearbeitet sowie die heuristische Behandlung des Problems mit isotropen Wavelets, insbesondere Konditionszahlen, diskutiert. Details zu den algorithmischen Komponenten, allen voran eine auf [48] beruhende stückweise polynomielle Anwendung diskreter Operatoren und die dazu benötigte Prediktion eines Baumes, werden ausgearbeitet. Im Anschluß wird ein eigenes, adaptives Lösungsschema vorgestellt. Dieses Schema beinhaltet unter Anderem die Verwendung eines restarted-GMRES Verfahrens, mit dem sich die aufwändigere Lösung der Normalengleichungen vermeiden lässt. Die mit der hier erstellten Erweiterung der AWM-Toolbox erzielten numerische Ergebnisse zu mehreren Beispielproblemen bilden den Schlußteil der Arbeit; eine Dokumentation des Programmcodes befindet sich im Anhang.

Die Arbeit ist in englischer Sprache verfasst, da Prof. Stevenson (Univ. Amsterdam) Zweitgutachter ist.

Preface

*Lucky you, who'll always find –
Ideas evolving in his mind.
As you went through different schools,
You have gained a lot of tools.
At last you learned, that to go on–
Only friends can make you strong.*

I would like to thank Prof. Dr. Angela Kunoth for her support and supervision, the comments and suggestions concerning not only this thesis, but also a big part of my mathematical education over the past 3 years. I am very grateful for giving me the opportunity to make my experiences as a SHK both here in Paderborn and at the TR32 in Bonn, as well as enabling me to take part on several interesting workshops, especially one at the MFO Oberwolfach. My gratitude also goes to Prof. Dr. Rob Stevenson for his suggestions in several discussions and being secondary advisor. At this opportunity I thank Prof. Dr. Peter Oswald for a long revealing discussion on some important functional analytical aspects. Special thanks go to Dr. Jürgen Vorloeper for enabling me to work with the AWM-Toolbox.

I am very grateful for the support of the whole AG Komplexe systeme. Namely, I am very happy about the help of Roland Pabel who enabled me to find some nerve-wracking mistakes in an early version of my code. For mathematical discussions and suggestions not only in the scope of this thesis I thank Katharina Wiechers, Christian Mollet and Manuel Richert.

I would like to thank my friends and family, especially my parents who have supported me in every possible way over all the years. My gratitude goes to Reiner Hermann and Alexandra Bäcker for proofreading this document and making many suggestions. Both you, my flatshare and all other friends have supported me so much. To everyone who might have found himself displeased with me, I apologize.

Florian Stapel, March 2011

Inhaltsverzeichnis

Erklärung	i
Zusammenfassung	iii
Preface	v
1 Introduction	2
2 Functional analytical aspects and basics	6
2.1 Vector-valued Sobolev spaces	6
2.1.1 The Bochner integral	6
2.1.2 Duality pairings, adjoint operators and Gelfand triples	9
2.1.3 Vector-valued distributions and Sobolev spaces	10
2.2 Tensor product of separable Hilbert spaces	14
2.2.1 Hilbert-Schmidt operators	14
2.2.2 Definition of Hilbert space tensor products via Hilbert-Schmidt operators	15
2.2.3 Tensor product of continuous linear operators	17
2.3 Tensor product decompositions	19
2.3.1 Decompositions for L_2 -spaces and $H^m(\Omega; F)$	19
2.3.2 Subspace splittings and Riesz bases for tensorized and intersected spaces	21
3 Parabolic evolution problems and their reformulation	26
3.1 Standard strong and weak formulations	26
3.2 Solution space for space-time weak formulations	28
3.3 Space and time weak formulation	31
3.3.1 Formulation	31
3.3.2 Well-posedness of the problem	32
3.3.3 Homogenization	33
3.3.4 An example for the heat equation	34
3.4 Sequence space reformulation	35
3.4.1 General strategy	35
3.4.2 Construction of Riesz bases for $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$ by component bases	36
3.4.3 Explicit representations of $\mathbf{B}$ and $\mathbf{f}$	38
4 Wavelet bases	40
4.1 Biorthogonal Wavelet bases for Sobolev spaces	40
4.1.1 Multiresolution sequence and Wavelets	40

4.1.2	Norm equivalences and Riesz basis property	43
4.2	General construction principles	45
4.2.1	Stable Completions	45
4.2.2	Tensor product constructions for multivariate bases	46
4.3	A concrete realization for (HSTWP)	48
4.3.1	Biorthogonal B-spline Wavelets on the interval	48
4.3.2	Concrete realization in the code: The case $d = 2, \tilde{d} = 4$	49
4.3.3	Operator in isotropic coordinates and preconditioning	50
5	Adaptive approximation and tree-structured index sets	54
5.1	Tree-structured index sets	54
5.2	Best N-term tree approximation and adaptivity	55
5.3	Coarsening	56
6	Application of operators	58
6.1	Tree-prediction	58
6.1.1	Prediction Strategy	58
6.1.2	Verification of Assumptions	62
6.2	Piecewise polynomial application of the operator B	64
6.2.1	Tree-structured Partitions	64
6.2.2	Transformation of wavelet expansions to piecewise polynomials	65
6.2.3	Efficient polynomial application of B	67
7	Numerical ingredients	70
7.1	The right-hand side	70
7.2	Overall solution scheme	70
7.3	The restarted GMRES-method	72
8	Solution of example problems $Bu = f$	76
8.1	An example with a jump in the right-hand side	76
8.2	An example with a buckle in the right-hand side	78
8.3	Results for an example with a smooth solution	78
8.4	An example with reduced regularity in the corners of the space-time cylinder	79
9	Conclusion and Outlook	80
A	Documentation of the Code	82
A.1	Methods changed from the AWM-Toolbox and new code	82

A.1.1	Files from igpm_base.lib	82
A.1.2	Files from ext	82
A.1.3	Files from adaptive_Box.lib	82
A.1.4	Other folders and demos	89
B	Notation	90
B.1	General notation	90
B.2	Special notation	90
B.3	Sequence and Function Spaces	91