Wolf-Michael Wendler

Theorie der endlichen Körper

und ein Vergleich mit der Charakteristik 0

Berichte aus der Mathematik

Wolf-Michael Wendler

Theorie der endlichen Körper

und ein Vergleich mit der Charakteristik 0

Shaker Verlag
Aachen 2014

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Kontakt:

Prof. Dr. rer. nat. Wolf-Michael Wendler

Ostfalia Hochschule für angewandte Wissenschaften
Fakultät für Fahrzeugtechnik
Robert-Koch-Platz 8a
38440 Wolfsburg

e-mail: W-M.Wendler@Ostfalia.de
wolfmichael.wendler@t-online.de

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-2763-1
ISSN 0945-0882

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen
Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9
Internet: www.shaker.de • E-Mail: info@shaker.de

Vorwort

Die Theorie der endlichen Körper ist ein fester Bestandteil der Algebra und findet ihre Anwendungen insbesondere in der Kodierungstheorie sowie Kryptographie. Sie ist auch Teil der diskreten Mathematik, meist im Zusammenhang mit lateinischen Quadraten und kombinatorischen Designs. Beschränkt man sich auf den Körper $\mathbb{F}(2)$, welcher als kleinster Körper nur die beiden Elemente 0, 1 hat, so stellt sie die Grundlage der mathematischen Untersuchung von Schaltkreisen im weitesten Sinne dar.

Es lassen sich aber auch die linearen Systemtheorien der Charakteristik 0 auf endliche Körper übertragen, was als deutlicher Hinweis auf eine vereinheitlichte Darstellung dieser auf den ersten Blick sehr unterschiedlich erscheinenden Lager gelten kann. Der Vergleich von Gesetzmäßigkeiten mathematischer Zusammenhänge der Charakteristik 0 und p bildet einen roten Faden für das gesamte Buch, welcher auch den Untertitel begründet. Verwendet werden ausnahmslos Lehrbücher sowie eine Reihe von Arbeiten des Autors, die in den letzten 15 Jahren in den Proceedings der Boole'schen Workshops veröffentlicht wurden. Auf diese gehen wir in (fast) chronologischer Reihenfolge zunächst ein, weil wir sie in den einzelnen Kapiteln zwar angeben, aber nicht weiter erläutern.

Die Arbeiten [0], … , [4] beschäftigen sich mit der Formulierung der linearen und weitgehend zeitinvarianten Systemtheorie sowie der vollständigen Lösung der homogenen und autonomen Gleichungen. Während [0], … , [3] ausschließlich der Charakteristik 2 verhaftet sind, enthält [4] erstmals eine Verallgemeinerung auf alle Primzahlen $p > 2$. Nur für $p = 2$ sind auch die Arbeiten [5], [8] formuliert, welche die Formulierung der Maxwell'schen Elektrodynamik sowie der klassischen Mechanik zum Gegenstand haben. Verwendet wurden dabei eine Verallgemeinerung der über $\mathbb{F}(2)$ bekannten Boole'schen numerischen Funktionen, die einem von der Charakteristik 0 verschiedenen Differenzialkalkül genügen. Die Argumente dieser Funktionen werden dabei als natürliche Zahlen angenommen. Übrigens ergibt sich trotzdem fast völlige Übereinstimmung mit den entsprechenden Theorien der Charakteristik 0.

[6], [7] beschäftigen sich mit der Einführung komplexer Zahlen über endlichen Körpern mit char $p \geq 2$ sowie deren Anwendung auf die Formulierung einer Quantenmechanik. Allerdings ist die Darstellung der komplexen Zahlen noch unvollständig und teilweise unbegründet: Die in späteren Arbeiten verwendeten Begriffe zahlentheoretischer Zugang und algebraischer Zugang zu komplexen Zahlen sowie quadratische Erweiterungskörper fehlen hier.

Komplexe Zahlen im Rahmen des zahlentheoretischen Zugangs sind Gegenstand von [9]. Die Untersuchung von Kegelschnitten findet man in [10]. Dabei werden für die verschiedenen ungeraden Primzahlen die beiden Fälle $p^k \equiv 1 \bmod 4$ (I) und $p^k \equiv 3 \bmod 4$ (II) unterschieden, welche uns durch das Buch begleiten werden. Reelle Funktionen wie Potenzen, Polynome und insbesondere auch transzendente Funktionen, letztere auf geometrischer Basis definiert, bilden den Inhalt von [11]. Schließlich ist in [12] eine reelle Analysis gegeben, bei der der zwanglose Anschluss an die Charakteristik 0 gewonnen wird. Dieses wird durch die Anfügung oder Setzung $\Delta x = 0$ erreicht, womit der Grenzwertbegriff vermieden wird.

Die Arbeiten [13], [14], enthalten abermals komplexe Zahlen, nun aber im Rahmen des algebraischen Zugangs im Vergleich mit dem zahlentheoretischen Zugang sowie die Formulierung des Fundamentalsatzes der Algebra. Die Arbeit [14] beschäftigt sich auf dieser Basis mit Clifford-Algebren und Quaternionen, mit deren Hilfe dann die Dirac'sche Theorie in der Charakteristik $p \geq 2$ abgebildet werden kann.

[15] enthält geometrische und analytische Eigenschaften komplexer transzendenter Funktionen, wobei von einer komplexen Exponentialfunktion in der Gauß'schen Ebene ausgegangen wird. Die Struktur und Bedeutung dieser Funktionen wird dabei algebraisch durch die Unter-suchung der Untergruppen der multiplikativen Gruppe des betreffenden Körpers sowie deren Nebenklassen geklärt.

[16] befasst sich mit den klassischen Lie-Gruppen und -Algebren und geht zunächst auf die Definition einer Mannigfaltigkeit ein. Letztere bildet auch die Grundlage von [19], in der der Differenzialformenkalkül auf der Grundlage der Grassmann-Algebra behandelt wird. Ferner wird in [17] die für die klassischen Lie-Gruppen und -Algebren wichtige Matrixexponentialfunktion sowie ihre Umkehrung bereitgestellt. Dies gelingt auf der Grundlage des sogenannten Ersatzpolynoms, welches aus der Charakteristik 0 übertragen werden kann.

Unter Einführung von Drehmatrizen wird in [18] die Struktur von Kugeln in einem beliebig dimensionalen Raum geklärt: So kann nicht nur die Zahl der Punkte dieser Kugeln angegeben werden, sondern auch die in diesen Kugeln enthaltenen Kreise und die Zahl der drehinvarianten Punkte. Als Nebenprodukt kennt man damit die Zahlen der Punkte (Vektoren) mit reellem, komplexem und verschwindendem Abstand vom Ursprung. Bei letzteren handelt es sich um die den endlichen Körpern eigentümlichen isotropen Vektoren.

Ziel dieses kurzen Überblicks ist es auch aufzuzeigen, dass die Entwicklung alles andere als geradlinig verlaufen ist und nebenbei ihren Ausgangspunkt in der Systemtheorie hatte, sich aber weiter auf die verschiedensten Disziplinen der Mathematik ausdehnte. Daraus ergibt sich nun folgende Gliederung des Buches.

Kapitel 1 gibt algebraische und zahlentheoretische Grundlagen, um die benötigten Hilfsmittel für das Folgende bereitzustellen und auch Fachfremden einen möglichen Zugang zu erleichtern. Kapitel 2 haben wir mit Algebraische Analysis überschrieben, denn die behandelten Inhalte der Definition und Untersuchung algebraischer und in unserem Sinne transzendenter Funktionen sind weit überwiegend algebraisch geprägt. Wir behandeln zunächst komplexe Funktionen und gehen dann zum Spezialfall reeller Funktionen über. Die bereits oben erwähnte Anfügung $\Delta x = 0$ liefert dann einen zwanglosen Zugang zum Differenzial- und Integralkalkül, wie man ihn aus der Charakteristik 0 kennt. Die Abschnitte über Folgen und Reihen sowie Funktionentheorie sind bisher in Proceedings noch nicht veröffentlicht [20]. Überhaupt fällt bei uns die starke Trennung von reeller Analysis und Funktionentheorie schwächer aus, da es letztendlich eine Frage der Definition ist, ob ein gerader Erweiterungskörper reell oder komplex ist.

Kapitel 3 enthält tradierte Inhalte der linearen Algebra, wie Vektoren, Matrizen, lineare Gleichungssysteme, Eigenwertprobleme, Jordan'sche Normalform und die Matrixexponenzialfunktion sowie deren Umkehrung und endet mit einem Abschnitt über Tensoralgebra und -analysis. Dazu sei angemerkt, dass es in der Lehrbuchliteratur durchaus Beispiele gibt, bei denen anstelle der Körper $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ganz allgemein von einem $\mathbb{K}$-Vektorraum ausgegangen wird. Dies findet regelmäßig ein Ende, wenn es um komplexe Vektoren und Matrizen geht. Damit ist auch hier ein Stück der Vereinheitlichung geschaffen worden.

Kapitel 4 befasst sich mit Geometrie, d.h. mit Kegelschnitten, Kugeln und Hyperkugeln weitgehend im Rahmen der euklidischen Geometrie und einem kleinen Abstecher in die pseudo-euklidische Geometrie. Der Abschnitt über Spinoren dient als Beispiel für eine symplektische Geometrie, der Abschnitt über Differenzialgeometrie befasst sich mit der elementaren Kurven- und Flächentheorie sowie einen Blick auf die innere Geometrie der Flächen. Die letzten beiden Abschnitte sind ebenfalls noch nicht in Proceedings veröffentlicht [21], [22].

Kapitel 5 enthält zusammengefasst klassische Lie-Algebren und -Gruppen, Clifford-Algebren und die Grassmann'sche Algebra sowie deren Anwendung auf den Differenzialformenkalkül.

Kapitel 6 gibt die Anwendung endlicher Körper auf die lineare Systemtheorie, wobei wir eingangs zum besseren Vergleich auf die entsprechenden Theorien in der Charakteristik 0 im Kontinuumsfall und zeitdiskreten Fall eingehen. Für die Charakteristik p verweisen wir beispielsweise auf die Arbeiten von [Gössel] und [Wunsch], bei denen auch der Vereinheitlichungsgedanke eine Rolle spielt. Durch Transformation der Systemmatrix der Zustandsgleichung auf Jordan-Form kann die Lösungsstruktur des homogenen und autonomen Systems vollständig aufgeklärt und ebenfalls große Analogien zur Charakteristik 0 festgestellt werden.

Schließlich enthält Kapitel 7 die Formulierung physikalischer Theorien, nämlich der Mechanik, Elektrodynamik und Quantenmechanik jeweils im klassischen wie im speziell relativistischen Fall.

Wir wenden uns nun einigen allgemeinen Aspekten dieses Buches zu. In den Kapiteln 1 bis 6 haben wir durchgehend von einer mathematischen Schreibart Gebrauch gemacht, d.h. wir geben Definitionen, formulieren Sätze und beweisen diese, was aufgrund der Vielzahl von Aussagen und festzulegenden Begriffen höchst sinnvoll erscheint. In Kapitel 7 sehen wir davon ab, da es in der Physik eher nicht gebräuchlich ist. Alle Kapitel sind nunmehr einheitlich für die Charakteristik p aufgeschrieben. Abgesehen von den bereits oben erwähnten neu hinzugekommenen Abschnitten, haben sich zahlreiche Präzisierungen und kleinere Ergänzungen ergeben. Die Kapitel 2, 4, 6 enthalten darüber hinaus eine Reihe von Abbildungen, welche wir meist auf der Grundlage einer (von $q!$) der möglichen Anordnungen der Zahlen endlicher Körper zeigen. Sie mögen der Anschauung dienen, was einem gelernten Physiker zugebilligt sei. Im Zusammenhang mit diesen Abbildungen gehen wir auch mit elementaren Mitteln auf graphentheoretische Interpretationen ein.

Ferner stellen die Kapitel 6 und 7 für uns gewissermaßen Testfälle dar: Es soll gezeigt werden, dass wohlbekannte und prominente Theorien der Charakteristik 0 auch auf endlichen Körpern *formuliert* werden können. Dies sagt nichts darüber aus, ob beispielsweise eine Theoretische Mechanik in der Charakteristik p physikalisch brauchbar ist. Andererseits liefern die Maxwell'schen Gleichungen eine Begründung transversaler Wellen, die für sich genommen durchaus interessante Untersuchungsobjekte darstellen können. Und sicher gibt es für eine derartige Quantenmechanik Bezüge zum Quantum-Computing.

Schließlich sei angemerkt, dass die durchschnittliche Seitenzahl eines Kapitels ziemlich genau 70 beträgt. Demgegenüber existieren für jedes Thema Lehrbücher im Umfang von bis zu einigen hundert Seiten. So besehen können und wollen wir in diesem ersten Schritt bei weitem nicht alles, was in der Charakteristik 0 bekannt ist, auf endliche Körper abbilden. Man denke beispielsweise auch daran, dass wir das riesige Gebiet der Differenzialgleichungen hier an manchen Stellen bestenfalls streifen.

Die Voraussetzungen zum Lesen des Buches sind vergleichsweise gering: Ab dem vierten, spätestens dem fünften Semester eines Bachelors der Mathematik/Physik, sind diese gegeben. Vorlesungen über Analysis und Lineare Algebra sind Grundvorlesungen. Eine Reihe von Dingen, wie beispielsweise Kreise und Kreisfunktionen sind aus der Schule bekannt, allerdings erscheinen sie hier in durchaus gewöhnungsbedürftiger Weise. Das Buch kann aber ohne weiteres auch von Theoretischen Physikern und theoretisch interessierten Ingenieuren zur Hand genommen werden.

Zuletzt bedanke ich mich und zwar in ebenfalls in chronologischer Reihenfolge: Prof. Dr. D. Bochmann riet mir, die Arbeiten [0] beim 4. Internationalen Workshop für Boole'sche Probleme vorzustellen und ermunterte mich in der Folgezeit, dieses Thema weiterzubetreiben. Prof. Dr. W. Borho verdanke ich die Beweisidee, die Jordan'sche Normalform zur Klärung der Lösungsstruktur der homogenen Zustandsgleichungen der Systemtheorie zu verwenden. Er brachte mich auch dazu, fortan meine Aussagen für alle Primzahlkörper zu formulieren. Schließlich bedanke ich mich bei Prof. Dr. B. Steinbach für seine Großzügigkeit, dass ich meine Arbeiten in einer überwiegend Boole'schen Gemeinde vorstellen durfte. Ich danke ihm auch für die mich bestärkende Frage beim letzten Workshop in 2012, ob es denn möglich wäre, alle diese Arbeiten in systematischer Weise zusammenzufassen. Letzteres mögen nun Verlag und Leser entscheiden.

Braunschweig, im Frühjahr 2014

Wolf-Michael Wendler

Inhaltsverzeichnis

Vorwort ... iii

Inhaltsverzeichnis ... vii

Verzeichnis der Abbildungen, Tabellen und Beispiele ... xv

1 Algebraische und zahlentheoretische Grundlagen 1

1 Zahlentheoretische Grundlagen ... **1**
1.1 Natürliche und ganze Zahlen, Teilbarkeit ... 1
1.2 ggT, kgV und euklidischer Algorithmus ... 3
1.3 Primzahlen und Primfaktorzerlegung ... 5
1.4 Kongruenzen, Restklassen und Restklassenarithmetik ... 6
1.5 Zahlentheoretische Funktionen ... 9
1.6 Potenzreste ... 12
1.6.1 Allgemeine Potenzreste ... 12
1.6.2 Quadratische Potenzreste ... 14

2 Algebraische Grundlagen ... **15**
2.1 Gruppen ... 15
2.1.1 Definitionen und Rechenregeln ... 15
2.1.2 Untergruppen, Nebenklassen und der Satz von Lagrange ... 17
2.1.3 Strukturerhaltende Abbildungen: Morphismen ... 20
2.1.3.1 Isomorphie ... 20
2.1.3.2 Homomorphie ... 22
2.1.4 Beispiele für Gruppen ... 23
2.1.4.1 Restklassengruppen und zyklische Gruppen ... 23
2.1.4.2 Faktorgruppen ... 27
2.2 Ringe ... 29
2.2.1 Definitionen, Rechenregeln und Nullteiler ... 30
2.2.2 Unterringe ... 32
2.2.3 Strukturerhaltende Abbildungen: Morphismen ... 33
2.2.3.1 Isomorphie ... 33
2.2.3.2 Homomorphie ... 33
2.2.4 Beispiele für Ringe ... 34

2.2.4.1 Restklassenringe 34
2.2.4.2 Polynomringe 35
2.3 Endliche Körper 37
2.3.1 Definitionen und Rechenregeln 37
2.3.2 Erweiterungskörper 41
2.3.3 Hauptsatz der endlichen Körper 45
2.3.4 Darstellungen der Elemente endlicher Körper 47
2.4 Quadratische Körpererweiterungen und komplexe Zahlen 50
2.4.1 Komplexe Zahlen: Zahlentheoretischer Zugang 50
2.4.2 Komplexe Zahlen: Algebraischer Zugang 54

2 Algebraische Analysis 59

1 Funktionen einer unabhängigen Variablen 60
1.1 Potenzen und Wurzeln 61
1.2 Polynome und der Fundamentalsatz der Algebra 65
1.3 Rationale Funktionen und Partialbruchzerlegung 69
1.4 Transzendente Funktionen 71
1.4.1 Vorbemerkungen 71
1.4.2 Definitionen und Formeln transzendenter Funktionen für $p > 2$ 71
1.4.3 Algebraische Eigenschaften 74
1.4.4 Analytische Eigenschaften 81
1.4.5 Reelle transzendente Funktionen für $p > 2$ 84
1.4.6 Umkehrfunktionen transzendenter Funktionen für $p > 2$ 91
1.4.7 Transzendente Funktionen für $p = 2$ 94

2 Differenzial- und Integralrechnung reeller Funktionen 96
2.1 Differenzialrechnung von Funktionen einer unabhängigen Variablen... 96
2.1.1 Stetigkeit 96
2.1.2 Differenzen- und Differenzialquotienten 97
2.1.3 Elementare Anwendungen der Differenzialrechnung 101
2.1.4 Ableitung elementarer Funktionen 104
2.1.4.1 Algebraische Funktionen 104
2.1.4.2 Transzendente Funktionen 106
2.2 Integralrechnung von Funktionen einer unabhängigen Variablen 108
2.2.1 Definition des Integrals 108
2.2.2 Hauptsätze der Integralrechnung 110
2.3 Ausblick auf Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen 111

3 Folgen und Reihen 114
3.1 Folgen und Reihen 114
3.2 Polynome, Polynomringe und Potenzreihen 118

4 Komplexe Analysis (Funktionentheorie) 123
4.1 Grundbegriffe 124
4.2 Differenziation komplexer Funktionen und Cauchy-Riemann'sche Differenzialgleichungen für $p > 2$ 130
4.3 Integration im Komplexen für $p > 2$ 135

4.3.1 Komplexe Kurvenintegrale 135
4.3.2 Cauchy'scher Integralsatz und Folgerungen 138
4.3.3 Residuen und Residuensatz 143
4.4 Differenziation und Integration im Komplexen für $p = 2$ 148

3 Lineare Algebra 153

1 Vektorräume und Vektoren 154
1.1 Definitionen 154
1.2 Skalarprodukt 156
1.3 Strukturerhaltende Abbildungen: Morphismen 159

1.4 Matrizen 161
2.1 Matrizenalgebra 161
2.2 Determinanten 164
2.3 Matrixinversion 165
2.4 Spezielle Matrizen 168

3 Vektoren und Matrizen: Lineare Gleichungssysteme 170
3.1 Reguläre Gleichungssysteme 170
3.2 Singuläre Gleichungssysteme und allgemeines Lösungsverhalten 172

4 Eigenwertprobleme 174
4.1 Definitionen 174
4.2 Eigenschaften der Eigenwerte und des charakteristischen Polynoms 175
4.3 Eigenvektoren und Eigenräume 177
4.4 Spezialfälle bestimmter Matrizen 179
4.5 Drehmatrizen 182
4.6 Jordan'sche Normalform 187
4.6.1 Definition und Konstruktion der Jordan'schen Normalform 187
4.6.2 Eigenschaften der Jordan'schen Normalform 191
4.7 Satz von Cayley-Hamilton und Minimalpolynom 193

5 Matrizenfunktionen 196
5.1 Ersatzpolynom einer Matrixfunktion und seine Taylor'sche Summe 196
5.2 Berechnung der Matrixexponentialfunktion und des -logarithmus 201
5.2.1 Formeln 201
5.2.2 Berechnung der Matrixexponentialfunktion für $p > 2$ 203
5.2.3 Berechnung des Matrixlogarithmus für $p > 2$ 209
5.2.4 Berechnung der Matrixexponentialfunktion und des -logarithmus für $p = 2$ 211
5.3 Eigenschaften der Matrixexponentialfunktion und des -logarithmus 214

6 Tensoralgebra und Tensoranalysis 217
6.1 Tensoralgebra 217
6.1.1 Einführung 217
6.1.2 Tensoren zweiter Stufe 219
6.1.3 Tensoren beliebiger Stufe und Rechenregeln 222

6.2 Tensoranalysis 223
6.2.1 Einführung 223
6.2.2 Christoffel'sche Symbole und kovariante Ableitung 226

4 Geometrie 231

1 Grundbegriffe der algebraischen Geometrie und der geometrischen Algebra 232
1.1 Grundbegriffe der algebraischen Geometrie 232
1.2 Grundbegriffe der geometrischen Algebra 234

2 Kegelschnitte: Kreise, Ellipsen und Hyperbeln 238
2.1 Einführung 238
2.2 Pythagoräische Gleichung und ihre Lösungen 240
2.3 Kreise und Ellipsen 242
2.4 Hyperbeln und Parabeln 249
2.5 Kreise und Hyperbeln in der pseudo-euklidischen Geometrie 254

3 Kugeln, Hyperkugeln und Hyperboloide 258
3.1 Zahl der Punkte von n-dimensionalen Kugeln und Hyperboloiden 259
3.2 Graphische Darstellung von Kugeln und Hyperboloiden der Dimension 3 266
3.3 Zahl der Kreise in Kugeln und Hyperboloiden 272
3.4 Weitere Ergebnisse und Aspekte n-dimensionaler Kugeln und Hyperboloide 275
3.5 Hyperkugeln in der Charakteristik $p = 2$ 276

4 Symplektische Geometrie und Spinoren 278
4.1 Spinoren und Spinoralgebra 278
4.2 Spinoren, Quaternionen und 4-Vektoren 282
4.3 Zusammenhang der Gruppen $\mathrm{SU}(2;\mathbb{F}_{\mathbb{C}})$ und $\mathrm{SO}(3;\mathbb{F}_{\mathbb{R}})$ 285

5 Differenzialgeometrie 289
5.1 Differenzialgeometrie der Raumkurven 289
5.1.1 Definitionen und die Formeln von Frenet 289
5.1.2 Vollständiges Invariantensystem der Raumkurven 295
5.2 Flächen und Flächenkurven 304
5.3 Innere Geometrie der Flächen 309
5.3.1 Geodätische Krümmung und geodätische Linien 309
5.3.2 Normal- und Hauptkrümmungen 312

5 Algebren 315

1 Einführung: Mannigfaltigkeiten 316
1.1 Topologische Grundbegriffe und Mannigfaltigkeiten 316
1.2 Tangentialräume und Vektorfelder über Mannigfaltigkeiten 320

2	**Lie-Gruppen und -Algebren**	**323**
2.1	Lie-Gruppen	323
2.1.1	Definitionen und die 1-Parametergruppe-Untergruppe	323
2.1.2	Klassische Lie-Gruppen	326
2.2	Lie-Algebren	329
2.2.1	Definitionen und Eigenschaften von Lie-Algebren	329
2.2.2	Algebraischer Zugang zu Lie-Algebren	331
2.2.3	Klassische Lie-Algebren	334
3	**Grassmann-Algebra und die Anwendung auf den Differenzialformenkalkül**	**335**
3.1	Grassmann Algebra	335
3.2	Differenzialformenkalkül	340
3.2.1	Äußere Differenziation und die Operatoren der Vektoranalysis	341
3.2.2	Integration von Differenzialformen und Integralsätze	344
3.2.3	Anwendung von Differenzialformen auf die Maxwell'schen Gleichungen	347
4	**Clifford-Algebren**	**349**
4.1	Definitionen	349
4.2	Spezielle Clifford-Algebren	351
4.3	Pauli- und Dirac-Matrizen: Die Algebren $Cl_{0,2}$ und $Cl_{1,3}$ in der Charakteristik 0	353
4.3.1	Pauli-Matrizen	353
4.3.2	Dirac-Matrizen	355
4.4	Quaternionen, Pauli- und Dirac-Matrizen über endlichen Körpern	356
4.4.1	Quaternionen und Pauli-Matrizen für $p > 2$	357
4.4.2	Quaternionen und Pauli-Matrizen für $p = 2$	361
4.4.3	Dirac-Matrizen für $p > 2$	363

6	**Anwendungen endlicher Körper in der Systemtheorie**	**367**
1	**Systemtheorien in der Charakteristik 0**	**368**
1.1	Definitionen	368
1.2	Lineare zeitkontinuierliche Systemtheorien	370
1.2.1	Lineare zeitabhängige Systemtheorie	370
1.2.2	Lineare zeitunabhängige Systemtheorie	373
1.3	Lineare zeitdiskrete Systemtheorien	377
1.3.1	Lineare zeitabhängige Systemtheorie	377
1.3.2	Lineare zeitunabhängige Systemtheorie	378
2	**Systemtheorien in der Charakteristik *p***	**381**
2.1	Automaten und zeitinvariante Systeme	381
2.1.1	Automaten	381
2.1.2	Lineare zeitinvariante Systeme	382
2.1.2.1	$\mathcal{A}$-Transformation	382
2.1.2.2	Lineare zeitinvariante Systeme	390

2.2 Lösung der homogenen Gleichung 393
2.2.1 Struktur des Zustandsraumes für den Eigenwert $\lambda = 0$ 393
2.2.2 Struktur des Zustandsraumes für den Eigenwert $\lambda = 1$ 398
2.2.3 Struktur des Zustandsraumes für die Eigenwerte $\lambda \neq 0, 1$ 400
2.2.4 Allgemeiner Fall 405
2.2.5 Stabilitätsverhalten von Systemen 406
2.3 Lösung der inhomogenen Gleichung 408
2.3.1 Autonome Systeme 409
2.3.2 Ausblick auf nicht-autonome Systeme 417

7 Formulierung physikalischer Theorien über endlichen Körpern 429

1 Klassische und relativistische Mechanik 430

1.1 Klassische Mechanik in der Charakteristik p 431
1.1.1 Elementare Variationsrechnung 431
1.1.2 Die Prinzipien von d'Alembert und Hamilton 434
1.1.3 Lagrange'sche und Hamilton'sche Gleichungen 435
1.1.3.1 Ableitung der Lagrange'schen Gleichungen 2. Art 435
1.1.3.2 Ableitung der Hamilton'schen Gleichungen 437
1.1.3.3 Kanonische Transformation der Hamilton'schen Gleichungen und Poisson'sche Klammern 439
1.2 Relativistische Mechanik in der Charakteristik p 441
1.2.1 Minkowski-Raum und Lorentz-Transformation 441
1.2.2 Relativistische Kinematik 443
1.2.3 Bewegungsgleichung für einen Massenpunkt 446
1.3 Systemtheoretische Aspekte 448

2 Klassische und relativistische Elektrodynamik 450

2.1 Klassische Elektrodynamik in der Charakteristik $p > 2$ 451
2.1.1 Maxwell'sche Gleichungen und Erhaltungssätze 451
2.1.2 Entkopplung der Maxwell'schen Gleichungen 452
2.1.3 Lösungen der Wellengleichungen 454
2.2 Relativistische Elektrodynamik in der Charakteristik $p > 2$ 456
2.2.1 Definition des elektromagnetischen Feldtensors 456
2.2.2 Kovarianz der Maxwell'schen Gleichungen 458
2.2.3 Energie-Impuls-Tensor 459
2.3 Elektrodynamik in der Charakteristik $p = 2$ 462

3 Klassische und relativistische Quantenmechanik 466

3.1 Quantenmechanik 466
3.1.1 Axiomatische Grundlagen der Quantenmechanik 466
3.1.2 Darstellungen von Hilbert-Vektoren und Operatoren 469
3.1.3 Klassische und quantenmechanische Kommutator-Regeln 471
3.1.4 Heisenberg'sche Unschärferelationen 473
3.1.5 Invarianzeigenschaften, Schrödinger- und Heisenberg-Bild 475
3.1.6 Harmonischer Oszillator 478

3.2 Relativistische Quantenmechanik: Dirac-Theorie 481
3.2.1 Dirac-Gleichung in der Charakteristik 0 481
3.2.2 Dirac-Gleichung in der Charakteristik $p > 2$ 484
3.2.2.1 Eigenschaften der Dirac-Gleichung 484
3.2.2.2 Lösungen der Dirac-Gleichung für ebene Elektronenwellen 488
3.2.3 Dirac-Gleichung in der Charakteristik $p = 2$ 490

Anhang A: Tabellen **493**

Literaturverzeichnis **499**

Sachverzeichnis **507**