

Aus dem Institut für Mathematik
der Universität zu Lübeck
Institutsdirektor: Prof. Dr. J. Prestin

Translationsinvariante Räume multivariater anisotroper Funktionen auf dem Torus

Inauguraldissertation zur Erlangung der Doktorwürde der Universität zu Lübeck
— aus der Sektion Informatik/Technik —
vorgelegt von Ronny Bergmann aus Hamburg.

Lübeck, im April 2013

Vorsitzender

Prof. Dr. Rüdiger Reischuk, Universität zu Lübeck

1. Berichterstatter

Prof. Dr. Jürgen Prestin, Universität zu Lübeck

2. Berichterstatter

Prof. Dr. Dirk Langemann, TU Braunschweig

Tag der mündlichen Prüfung Mittwoch, den 10. Juli 2013

Zum Druck genehmigt. Lübeck, den 5. August 2013

Berichte aus der Mathematik

Ronny Bergmann

Translationsinvariante Räume multivariater
anisotroper Funktionen auf dem Torus

Shaker Verlag
Aachen 2013

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Zugl.: Lübeck, Univ., Diss., 2013

Copyright Shaker Verlag 2013

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Gesetzt in der Schriftart „Vollkorn“ von Friedrich Althausen,
friedrichalthausen.de/vollkorn.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-2266-7

ISSN 0945-0882

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen

Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9

Internet: www.shaker.de • E-Mail: info@shaker.de

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	I
I Grundlagen	7
1.1 Gitter und multivariate Restklassen	9
Die Smith-Normalform	12
Die Musternormalform	13
Vollständigkeit	16
Ein schneller Algorithmus zur Mustererzeugung	17
1.2 Räume periodischer Funktionen	19
1.3 Die diskrete Fourier-Transformation auf dem Muster $\mathcal{P}(\mathbf{M})$	25
1.4 Endlichdimensionale translationsinvariante Räume	29
1.5 Die anisotrope periodische Multiskalen-Analyse	34
Multivariate periodische Wavelets	38
Die Wavelet-Transformation	41
Die dyadische Multiskalen-Analyse	47
2 Approximation durch Interpolation	51
2.1 Das Interpolations-Problem	52
2.2 Die elliptischen Strang-Fix-Bedingungen	54
2.3 Der Interpolationsfehler $\ f - L_{\mathbf{M}}f\ $	55
Interpolationsfehler bei trigonometrischen Polynomen	56
Approximation durch trigonometrische Polynome	57
Allgemeine Approximation durch Interpolation	61
3 Die schnelle diskrete Fourier- und Wavelet-Transformation	63
3.1 Basen für Muster und erzeugende Menge	64
3.2 Die schnelle Fourier-Transformation	67
Vermeidung der Umsortierung	68

Der Algorithmus	70
Beispiel	73
3.3 Die schnelle Wavelet-Transformation	75
Die Skalierungs-Eigenschaft.	76
Der Algorithmus	79
 4 Trigonometrische Polynome	 83
4.1 Einführung und Idee	84
Die klassischen de la Vallée Poussin-Mittel	85
Verallgemeinerung ins Mehrdimensionale	87
Box-Splines	90
4.2 De la Vallée Poussin-artige Skalierungsfunktionen	92
4.3 Dyadische de la Vallée Poussin-artige Wavelets.	100
4.4 Richtungsselektive Wavelets.	103
4.5 Abhängigkeitstiefe der Skalierungsräume	116
 Literaturverzeichnis	 129
 Verzeichnisse	 135
 wissenschaftlicher Werdegang	 137

Einleitung

Die Betrachtung eines Bildes beginnt mit dem Erfassen des Bildes als Ganzes. Je mehr Zeit ein Betrachter danach vor dem Bild verbringt, umso mehr Details wird er wahrnehmen, beginnend bei den Auffälligsten oder Markantesten bis hin zur Pinselführung an bestimmten Objekten in der dargestellten Szene. Schriebe der Betrachter seine Beobachtungen in zeitlich korrekter Reihenfolge auf, so könnte man durch Zerlegen des Textes und etwa die Betrachtung nur des hintersten Drittels, sich eben nur mit den Details beschäftigen.

Der gleichen Philosophie folgt die seit Ende der 1980er Jahre in Arbeiten von Daubechies [12, 13], Meyer [37], Mallat [32, 33] und anderen entstandene Theorie der Wavelets auf der reellen Achse. Der Begriff selbst bezeichnet als Zusammensetzung des englischen Wortes „Wave“ für Welle und der verniedlichenden, verkleinernden Endung „lette“ aus dem Französischen eben jene Betrachtung verschiedener Detailstufen, den sogenannten Skalen. Dies entspricht verschiedenen Zeitintervallen des Betrachters aus dem ersten Abschnitt. Die große Verbreitung der Wavelets begründet sich in der Einfachheit des Frameworks der Multiskalen-Analyse und den daraus resultierenden schnellen Algorithmen, die eine Wavelet-Zerlegung in $\mathcal{O}(n)$ Rechenschritten ermöglichen [33, Abschnitt 7.3.1]. In diesem Framework erzeugen die Translate einer für jede Skale unterschiedlich gestreckten Skalierungsfunktion ineinander geschachtelte Räume, zu denen die Wavelets orthogonale Räume „zwischen“ den Skalierungsräumen aufspannen. Neben den Skalierungsräumen mit ihrer Translationsinvarianz sind die wichtigsten Werkzeuge für den schnellen Algorithmus die Fourier-Transformation und die Zwei-Skalen-Gleichungen, die den Zusammenhang zweier aufeinanderfolgender Räume beschreiben.

Neben den „klassischen“ Wavelets auf der reellen Achse sind die periodischen Wavelets auf dem Kreis oder dem Intervall mit identifiziertem Rand definiert. Sie entstanden zunächst für die Betrachtung periodischer Funktionen durch die Periodisierung der Wavelets aus dem letzten Abschnitt. Dabei wurden die Eigenschaften, wie etwa die des translationsinvarianten Raumes, auf das Periodische übertragen und später periodische Wavelets direkt durch ihre Fourier-Koeffizienten definiert [8]. Die Algorithmen zur periodischen Wavelet-Transformation lassen sich direkt in den Fourier-

Koeffizienten beschreiben. Für diskrete Abtastungen der Funktion f entsteht so der natürliche Zusammenhang zur diskreten Fourier-Transformation. Auch hier bildet die Multiskalen-Analyse den wichtigsten konstruktiven Zugang zur Definition von Wavelets [39, 45, 50, 52]. Aufbauend auf einer periodischen Multiskalen-Analyse lassen sich beispielsweise Approximationsfehler studieren [53]. Für die klassischen und die periodischen Wavelets ist der häufigste Fall, dass eine Skalierung um den Dilationsfaktor 2 verwendet wird, also auf jedem Level der Multiskalen-Analyse genau ein Wavelet den Raum aufspannt, der das orthogonale Komplement eines Skalierungsraumes im nächstgrößeren Raum bildet. Dies wird auch als dyadische Multiskalen-Analyse bezeichnet.

Ausgehend von den eindimensionalen Wavelets wurden bereits früh mehrdimensionale Verallgemeinerungen, die Tensorprodukt-Wavelets, betrachtet [13, 37], bei denen die Skalierungsfunktion im $\mathbb{R}^d$ als Produkt von eindimensionalen Skalierungsfunktionen entsteht und die Translationen dann auf dem Gitter $\mathbb{Z}^d$ betrachtet werden. Im Periodischen wurde dies in [25, 46, 55] ebenso betrachtet, wobei in beiden Fällen für die Verallgemeinerung der dyadischen Multiskalen-Analyse eine Dilatation mit der Diagonalmatrix $J = \text{diag}(2, \dots, 2)$ gegeben ist. Dadurch entstehen in jeder Skale allerdings $2^d - 1$ Räume, die jeweils durch die Translate eines Wavelets erzeugt werden. Diese Wavelets entstehen als Produkt eindimensionaler Wavelet- und Skalierungsfunktionen.

Eine Verallgemeinerung des Tensorprodukt-Falles findet sich in [5, 7], wo anstelle des Tensorprodukt-Gitters Muster betrachtet werden, welche durch eine allgemeine reguläre Matrix $M \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ entstehen und auf denen eine diskrete Fourier-Transformation definiert werden kann. Der Tensorprodukt-Fall findet sich hier in den Diagonalmatrizen $N E_d$ wieder, welche lediglich ein und denselben ganzzahligen Wert auf der Hauptdiagonalen besitzen. Auf Basis der Multiskalen-Analyse bezüglich einer Folge von Diagonalmatrizen werden Approximationseigenschaften des dazugehörigen Wavelet-Systems untersucht. Dazu werden die Strang-Fix-Bedingungen in [25, 46] ins Periodische übertragen und damit eine Approximationsgüte für die betrachteten Wavelet-Systeme angegeben, insbesondere auch für die Approximation von Funktionen, die in verschiedene Richtungen jeweils ein unterschiedliches Abklingverhalten in den Fourier-Koeffizienten besitzen.

Darauf aufbauend lassen sich Skalierungsräume einführen, die analog zum eindimensionalen Dilationsfaktor jeweils durch Dilatation mit einer festen Matrix M auseinander hervorgehen [34, 40]. Es ist jedoch im Mehrdimensionalen nicht mehr nur

durch den Dilatationsfaktor zwingend ein eindeutiger Zusammenhang zu den Räumen gegeben. In der Verallgemeinerung ergibt sich für Matrizen, deren Determinante betragsmäßig identisch ist, die gleiche Skalierung um einen Faktor, während sich die Dilatationsrichtungen deutlich unterscheiden können [29]. Dadurch ist durch einen festen Dilatationsfaktor nicht mehr eindeutig beschrieben, mit welchen Dilatationsmatrizen die Skalierungsräume geschachtelt sind.

Für Funktionen, die auf dem $\mathbb{R}^d$ definiert sind, bilden Curvelets [15, 17] oder Shearlets [11, 21, 22] anisotrope Wavelet-Systeme, d. h. die Konstruktion der Multiskalen-Analyse geht bei diesen Wavelets nicht aus der Tensorprodukt-Bildung eindimensionaler Funktionen hervor. So bilden diese Systeme einen Ansatz, Richtungen in den Wavelets zu bevorzugen und damit gewisse richtungsbezogene Details auf einer Skale zu beschreiben.

In dieser Arbeit werden zunächst in Kapitel 1 diejenigen Begriffe und Eigenschaften in einer einheitlichen Notation und Begriffsbildung zusammengetragen, die als Grundlage der folgenden Kapitel benötigt werden. Ausgehend vom Muster $\mathcal{P}(M)$ und der erzeugenden Menge $\mathcal{G}(M)$ einer regulären ganzzahligen Matrix M führt der Abschnitt 1.1 die Smith- und Musternormalform ein und schließt mit einer Beschreibung aller diskreten Untergruppen des Torus $\mathbb{T}^d$. Neben den Räumen $L_p(\mathbb{T}^d)$ Lebesgue-integrierbarer Funktionen und den Folgenräumen $\ell_q(\mathbb{Z}^d)$ führt Abschnitt 1.2 Räume ein, bei denen die enthaltenen Funktionen ein richtungsbezogenes Abklingverhalten in ihren Fourier-Koeffizienten besitzen und somit eine gewisse Glattheit aufweisen. Mit Hilfe der diskreten Fourier-Transformation bezüglich des Musters einer Matrix aus Abschnitt 1.3 definiert Abschnitt 1.4 translationsinvariante Räume bezüglich Translation auf dem Muster und trägt deren Eigenschaften im Lemma 1.23 zusammen. In Abschnitt 1.5 dienen diese Räume als Grundlage für die periodische, anisotrope Multiskalen-Analyse $(\{J_k\}_{k>0}, \{V_j\}_{j\geq 0})$ und die dazugehörige Wavelet-Transformation periodischer Funktionen. Für den Spezialfall einer dyadischen Multiskalen-Analyse wird abschließend eine explizite Konstruktionsmethode der dazugehörigen Wavelets vorgestellt.

Kapitel 2 betrachtet die Lösbarkeit des Interpolations-Problems auf Mustern $\mathcal{P}(M)$ und eine Verallgemeinerung der in [46] eingeführten periodischen Strang-Fix-Bedingungen, die anisotropen Strang-Fix-Bedingungen. Mit diesen ist es möglich, die Approximationseigenschaften aus [55] aus dem Tensorprodukt-Fall auf allgemeine Matrizen zu übertragen. Dabei ergibt sich eine Fehlerabschätzung für die Interpolation, welche die Glattheit des Fundamentalinterpolanten entlang verschiedener Richtun-

gen in Verbindung setzt mit dessen Interpolationsfehler für gewisse Funktionen f , die ebenso einer gewissen Richtungsglattheit unterliegen.

Für die in den Abschnitten 1.3 und 1.5 eingeführte Fourier- und Wavelet-Transformation auf dem Muster bzw. in translationsinvarianten Räumen bezüglich des Musters beschreibt Kapitel 3 schnelle Algorithmen, die bereits in [2] veröffentlicht wurden. Für die Fourier-Transformation bezüglich einer Matrix M lässt sich die Berechnung zurückführen auf ein Kronecker-Produkt von eindimensionalen Fourier-Matrizen, das von der Smith-Normalform abhängt. Mit diesem Ansatz lässt sich die gleiche Komplexität wie bei der eindimensionalen diskreten Fourier-Transformation erreichen, jedoch lässt sich die multivariate diskrete Fourier-Transformation vielfältiger parallelisieren. Für diesen schnellen Algorithmus ist eine gewisse Anordnung der Elemente des Musters notwendig, die gleichzeitig Zyklen im Muster charakterisiert und sich auf die erzeugende Menge übertragen lässt. Mit dieser Anordnung wird es aber ebenso möglich, für die Wavelet-Transformation aus Abschnitt 1.5 einen schnellen Algorithmus anzugeben, der im Fourier-Bereich durchgeführt die gleiche Komplexität besitzt wie die oben genannte eindimensionale Wavelet-Transformation auf der reellen Achse, d. h. lediglich linear von der Anzahl der Abtastpunkte abhängt, die in diesem mehrdimensionalen Szenario durch den Betrag der Determinante von M gegeben ist.

Kapitel 4 widmet sich einer wesentlichen Eigenschaft der Wavelets, der Lokalisierung. Zunächst werden in diesem Kapitel die eindimensionalen de la Vallée Poussin-Mittel eingeführt und so formuliert, dass sie mit einem Tensorprodukt-Ansatz selbst für die Konstruktion einer Skalierungsfunktion bezüglich einer Matrix M genutzt werden können. Diese als Motivation eingeführte Idee eignet sich jedoch nicht für Dilatationsmatrizen, die mit Drehung oder Scherung nicht dieser Tensorprodukt-Idee folgen. Der allgemeine Fall der de la Vallée Poussin-artigen Skalierungsfunktionen in Abschnitt 4.2 lässt beliebige Dilatationsmatrizen zu und ermöglicht es zusätzlich, die Fourier-Koeffizienten der Skalierungsfunktion aus der Abtastung einer beliebig glatten Funktion g zu erhalten. Diese Konstruktion lässt sich direkt auf die Konstruktion dyadischer Wavelets, den de la Vallée Poussin-artigen Wavelets, übertragen, deren Fourier-Koeffizienten ebenfalls als Abtastung einer Funktion entstehen, die in ihrer Glattheit mit der Funktion g übereinstimmt. Mit diesen entsteht in dieser Arbeit ein erstes periodisches Wavelet-System, das Scherungsmatrizen in der Folge der Dilatationsmatrizen einer Multiskalen-Analyse ermöglicht. Darauf aufbauend beschreibt Abschnitt 4.4 einen schematischen Zugang für die Annäherung einer Richtung in der sukzessiven Auswahl von Teilmustern ausgehend von einem beliebigen Muster. Das Detail, das in dieser Richtung in den mehrdimensionalen Daten vorkommt, findet

sich dabei in einem Wavelet-Raum wieder. Diese Richtung kann beliebig genau angenähert werden. Illustriert wird dies an zwei Zerlegungen, deren Ausgangsfunktionen Unstetigkeitsstellen in den Richtungsableitungen besitzen. Der Abschnitt 4.5 charakterisiert die de la Vallée Poussin-artigen Skalierungsfunktionen und -Wavelets abhängig von der Funktion g dahingehend, wann für die Definition der Skalierungsfunktion zum Level j nur endlich viele Dilatationsmatrizen für die darüber liegenden Räume notwendig sind. Damit ist es in gewissen Fällen möglich, multivariate de la Vallée Poussin-Mittel und -Wavelets anzugeben, also Funktionen, für deren Definition wie im Eindimensionalen lediglich die Dilatation zwischen zwei Skalierungsräumen notwendig ist.

Danksagung. In erster Linie möchte ich mich bei Prof. Dr. Jürgen Prestin bedanken für die vielen motivierenden und konstruktiven Diskussionen zu den Themen dieser Dissertation sowie bei den Mitarbeitern des Instituts für Mathematik der Universität zu Lübeck für die Gespräche und Ideen, insbesondere Dr. Peter Dencker für die Hilfe bei der Formulierung des Beweises von Satz 1.8. Bei David Gregorczyk, Claudia Paulick und Sebastian Penka möchte ich mich für das Korrekturlesen bedanken sowie bei Inga Stolz und Lisa Kausch, für ihr Interesse und Engagement am Thema.

Außerdem möchte ich mich bei meiner Familie bedanken und allen, die meine Zeit während des Studiums und der Promotion in Lübeck, auch abseits der Universität, so abwechslungsreich gemacht haben. Insbesondere Mandy, Dorinja, Lukas, Richard, Albert und Stella, aber auch vielen anderen, mit denen ich im „Blauen Engel“, der MetaMeute oder der Hamster-WG interessante Gespräche und wunderschöne Abende verbracht habe, ein herzliches Dankeschön für die Beschäftigung mit und der Ablenkung von der Mathematik.

Lübeck, den 24. April 2013
Ronny Bergmann