Einführung in die Symmetrien der Mathematik und Naturwissenschaften

Uwe Kraeft

2013

Berichte aus der Mathematik

Uwe Kraeft

Einführung in die Symmetrien der Mathematik und Naturwissenschaften

Shaker Verlag
Aachen 2013

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Copyright Shaker Verlag 2013
Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-1923-0
ISSN 0945-0882

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen
Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9
Internet: www.shaker.de • E-Mail: info@shaker.de

Vorwort

Symmetrien sind überall in der Natur zu finden. In alten Zeiten wurden ihnen möglicherweise sogar magische Fähigkeiten zugesprochen. Der Mensch selbst ist ungefähr bilateralsymmetrisch gebaut. Im Tierreich finden sich daneben zum Beispiel vier-, fünf- oder sechszählige Symmetrieachsen. Bei Kristallen sind darüber hinaus zahlreiche weitere Symmetrien bekannt.

Schon die alten Ägypter schufen, angeregt durch die Vorbilder der Natur, kunstvolle regelmäßige Strukturen von Bauwerken und Ornamenten, welche zum Beispiel die Araber weiter entwickelten. Ein Höhepunkt war die mathematische Herleitung der 230 kristallographischen Raumgruppen durch Schönflies und Fedorow gegen Ende des 19. Jahrhunderts unter Nutzung der damals jungen Gruppentheorie. Nach einer Zeit, in der vor allem die naturwissenschaftlichen Anwendungen der theoretisch gefundenen Erkenntnisse im Mittelpunkt standen, setzte dann in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts ein bis heute dauernder Zuwachs der Erkenntnisse ein, so dass jetzt die Symmetrielehre wieder ein Gebiet der Forschung ist. Auch hier ergaben sich zum Beispiel durch die Entdeckung der bei Kristallen „verbotenen“ fünfzähligen Symmetrieachsen in Quasikristallen wichtige Anwendungen.

Der Schwerpunkt dieses Textes sind die vielseitigen mathematischen Grundlagen der Symmetrien und beispielsweise nicht die hier nur beispielhaft genannten physikalischen Theorien. In 10 Kapiteln werden nach einer Einführung mathematische Symmetrien, kristall- und quasikristallgeometrische Symmetrien, kristalloptische Symmetrien, allgemeine physikalische Symmetrien, geometrische Symmetrien der kleinsten und größten Formen, Symmetrien in Nichteuklidischen Geometrien, Symmetrien der Elemente und ihrer Verbindungen, biologische Symmetrien sowie Symmetrien im Bauwesen, in der Kunst und Literatur im Hinblick auf das prinzipiell mathematisch Wesentliche kurz erläutert. Für weiter gehende spezielle Themen sind Hinweise in der Literaturauswahl auf Seite 65 zu finden.

Das Buch ist der neunte Band eines einführenden Lehrgangs der Mathematik und stellt die Meinung des Autors nach dessen Kenntnissen dar. Der Inhalt wurde sorgfältig auf Fehler geprüft, die aber nicht gänzlich ausgeschlossen werden können. Eine Gewährleistung oder Garantie für die Richtigkeit des Textes kann nicht übernommen werden. Ich bin für entsprechende Hinweise oder Verbesserungsvorschläge dankbar.

Leimen, im Februar 2013 Uwe Kraeft

http://www.kannitverstan.net/

Auswahl von Symbolen

$\Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow$	daraus folgt (in den angegebenen Richtungen)
$\exists$	es gibt
$\forall$	für alle
$\in$	ist Element von (ist enthalten in)
A={a,b,c}	Beispiel einer Menge A mit Elementen a, b und c
M^{-1}, a^{-1}	inverses Element
$\cup$	Vereinigung von Mengen
$\bullet$	Skalarprodukt von Vektoren, Zeilen und Spalten von Matrizen oder Zeilen von Matrizen und Spaltenvektoren
$\times$	Vektorprodukt
=	(genau) gleich (nur in der Mathematik)
$\cong$	angenähert gleich (Grenzwert)
$\approx$	ungefähr gleich
$\equiv$	$a \equiv b \pmod c \Leftrightarrow a \equiv b_c \Leftrightarrow (a-b)/c \in \mathbb{Z}$ für $a,b \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{N}$
$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen 1, 2, 3, ...
$\mathbb{N}^0$	natürliche Zahlen einschließlich der Null 0, 1, 2, 3, ...
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...
$\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^+$	rationale Zahlen, positive rationale Zahlen
$\mathbb{R}, \mathbb{R}^+$	reelle Zahlen, positive reelle Zahlen
$\mathbb{C}$	komplexe Zahlen a+bi mit $i^2 = -1$
$\mathbb{C}^*$	komplexe Zahlen ohne 0
i,j,m,n, ...	meistens natürliche oder ganze Zahlen (oder $i^2=-1$)
z, z*, $\bar{z}$	komplexe Zahlen z=a+bi, $z^*=\bar{z}$=a-bi
$\vec{v}$	Vektor
$\dot{x}$, $\dot{\varphi}$	$=\frac{dx}{dt}$, $=\frac{d\varphi}{dt}$ (Ableitungen nach der Zeit in der Physik)

Andere spezielle Symbole werden im Text erklärt.

Inhalt

Seite
1. Einführung - - - - - - - - - 1
2. Mathematische Symmetrien- - - - - - - - 7
3. Kristall- und quasikristallgeometrische Symmetrien - - 17
4. Kristalloptische Symmetrien- - - - - - - - 33
5. Allgemeine physikalische Symmetrien - - - - - - 37
6. Geometrische Symmetrien der kleinsten und größten Formen 45
7. Symmetrien in Nichteuklidischen Geometrien - - - 51
8. Symmetrien der Elemente und ihrer Verbindungen - - 55
9. Biologische Symmetrien - - - - - - - - 57
10. Symmetrien im Bauwesen, in der Kunst und Literatur - - 61

Literaturauswahl - - - - - - - - - 65

Veröffentlichungen des Autors - - - - - - - - 67

Lehrgang der Mathematik- - - - - - - - - 67

Gesammelte Korrekturen - - - - - - - - - 69

Diskus von Phaistos - - - - - - - - - - 71

Quadratur des Kreises - - - - - - - - - 74

Studies in Number Theory- - - - - - - - - 76