

# LINEARE ALGEBRA II

JÜRGEN HAUSEN



**Jürgen Hausen**

**Lineare Algebra II**

Shaker Verlag  
Aachen 2013

**Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Copyright Shaker Verlag 2013

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-1887-5

ISSN 0945-0882

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen

Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9

Internet: [www.shaker.de](http://www.shaker.de) • E-Mail: [info@shaker.de](mailto:info@shaker.de)

## Vorwort zur ersten Auflage

Der vorliegende Text entstand aus einer Vorlesung “Lineare Algebra II” im Rahmen des Mathematikstudiums. Er führt das Skriptum [1] fort. Ich habe mich wieder um knappe Darstellung bemüht, ohne dabei auf vollständige Beweise und Beispiele zu verzichten. Jeder Textabschnitt lässt sich in einer Vorlesungsdoppelstunde (90 min.) behandeln.

Tübingen im April 2013

Jürgen Hausen



## INHALTSVERZEICHNIS

1. Etwas mehr Algebra	1
1.1. Gruppen	1
<i>Gruppen, Untergruppen, Gruppenhomomorphismen, Kern, Bild, direkte Produkte</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 1.1	5
1.2. Faktorgruppen abelscher Gruppen	7
<i>Faktorgruppen abelscher Gruppen, <math>\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}</math> als Faktorgruppe, Homomorphiesatz</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 1.2	11
1.3. Kommutative Ringe	13
<i>Kommutative Ringe, Unterringe, Ringerweiterungen, Homomorphismen, direkte Produkte</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 1.3	17
1.4. Ideale und Faktorringe	19
<i>Ideale, Faktorringe, Homomorphiesatz, Summe und Produkt von Idealen, Chinesischer Restsatz</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 1.4	23
2. Teilbarkeitstheorie	25
2.1. Teilbarkeit in Integritätsringen	25
<i>Teilbarkeitsbegriff, Assoziiertheit, größte gemeinsame Teiler, kleinste gemeinsame Vielfache, irreduzibel, prim</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 2.1	29
2.2. Euklidische Ringe	31
<i>Euklidische Ringe, Divisionsalgorithmus für Polynome, euklidischer Algorithmus</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 2.2	35
2.3. Primfaktorzerlegung	37
<i>Faktorielle Ringe, eindeutige Primfaktorzerlegung, Chinesischer Restsatz, Beispiele</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 2.3	41
3. Moduln	43
3.1. Grundbegriffe	43
<i>Moduln, Untermoduln, Erzeugnis, Produkt und direkte Summe, Homomorphismen, Homomorphiesatz</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 3.1	49
3.2. Freie Moduln	51
<i>Lineare Unabhängigkeit, Basen, Rang, Untermoduln freier Moduln über Hauptidealringen</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 3.2	55
3.3. Matrizen und lineare Abbildungen	57

<i>Matrizenkalkül, Beschreibung linearer Abbildungen, Determinante, Invertierbarkeit</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 3.3	63
3.4. Torsion und Länge	65
<i>Torsionselemente, Torsionsanteil eines Moduls, Länge eines Moduls, Längenberechnung</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 3.4	69
4. Moduln über euklidischen Ringen	71
4.1. Matrizen über euklidischen Ringen	71
<i>Elementarmatrizen, Hermite-Normalform, Smith-Normalform, Basen für Untermoduln</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 4.1	77
4.2. Die Struktursätze	79
<i>Struktursätze für endlich erzeugte Moduln über euklidischen Ringen, Elementarteiler, primäre Elementarteiler</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 4.2	83
5. Normalformentheorie	85
5.1. Das Minimalpolynom	85
<i>Annulatorideal eines Moduls, Minimalpolynom eines Endomorphismus, zyklische Vektorräume</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 5.1	89
5.2. Rationale Normalform und Elementarteiler	91
<i>Elementarteiler eines Endomorphismus, Begleitmatrizen, Satz von Cayley-Hamilton, Rationale Normalform</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 5.2	95
5.3. Jordansche Normalform	97
<i>Primäre Elementarteiler eines Endomorphismus, Jordansche Normalform, Jordan-Zerlegung</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 5.3	101
5.4. Normalformenberechnung	103
<i>Berechnung der Elementarteiler und primären Elementarteiler, Bestimmung von Transformationsmatrizen</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 5.4	109
6. Bi- und Multilineare Algebra	111
6.1. Bilinearformen	111
<i>Bilinearformen, Vektorraum der Bilinearformen, Gramsche Matrix, Transformationsformel</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 6.1	115
6.2. Symmetrische Bilinearformen	117
<i>Symmetrische Bilinearformen, Gramsche Matrix, Sylvestersches Trägheitsgesetz</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 6.2	121

6.3. Tensorprodukte	123
<i>Multilineare Abbildungen, Tensorprodukt, Rechenregeln, universelle Eigenschaft, Basen für Tensorprodukte</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 6.3	129
6.4. Äußere Potenzen	131
<i>Alternierende multilineare Abbildungen, äußere Potenzen, Rechenregeln, universelle Eigenschaft, Basen für äußere Potenzen</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 6.4	137
Literatur	139
Index	140