

Numerical multi-scale modelling of composite plates

Dissertation

zur Erlangung des Grades des
Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät III
Chemie, Pharmazie, Bio- und Werkstoffwissenschaften
der Universität des Saarlandes

von

Dipl.-Ing. Cécile Eliane Helfen



Saarbrücken

2012

Tag des Kolloquiums 14. Januar 2013

Dekan:	Univ.-Professor Dr. Volkhard Helms
Berichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. Stefan Diebels
	Prof. Dr.-Ing. habil. Holm Altenbach
Vorsitz:	Prof. Dr. Hans-Georg Herrmann
Akad. Mitarbeiter:	Dr.-Ing. Frank Aubertin

Saarbrücker Reihe

Materialwissenschaft und Werkstofftechnik

Band 38

Numerical multi-scale modelling
of composite plates

Cécile Eliane Helfen

Herausgeber:

Prof. Dr.-Ing. Stefan Diebels

Prof. Dr. Eduard Arzt
Prof. Dr.-Ing. Dirk Bähre
Prof. Dr.-Ing. Christian Boller
Prof. Dr. rer. nat. Ralf Busch
Prof. Dr. rer. nat. Rolf Clasen
Prof. Dr.-Ing. Frank Mücklich
Prof. Dr. rer. nat. Martin Müser
Prof. Dr. rer. nat. Wulff Possart
Prof. Dr.-Ing. Markus Stommel
Prof. Dr. rer. nat. Horst Vehoff

Shaker Verlag

Aachen 2013

Bibliographic information published by the Deutsche Nationalbibliothek

The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available in the Internet at <http://dnb.d-nb.de>.

Zugl.: Saarbrücken, Univ., Diss., 2013

Copyright Shaker Verlag 2013

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the prior permission of the publishers.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-1752-6

ISSN 1860-8493

Shaker Verlag GmbH • P.O. BOX 101818 • D-52018 Aachen

Phone: 0049/2407/9596-0 • Telefax: 0049/2407/9596-9

Internet: www.shaker.de • e-mail: info@shaker.de

À Thomas

Preface

This research work has been performed in the Chair of Applied Mechanics between September 2009 and October 2012. The financial support of the DFG (Deutsche Forschungsgemeinschaft) under the grant Di 430/11-1 is gratefully acknowledged.

Firstly, I would like to thank my advisor Prof. Dr.-Ing. Stefan Diebels, for his help and support during my time in the Chair of Applied Mechanics. I really appreciated the constructive discussions; his scientific knowledge in the field of material modelling and homogenisation contributed significantly to this work. Secondly, my thanks go to Prof. Dr.-Ing. habil. Holm Altenbach for being the co-referee of my Ph. D., and especially for the helpful remarks on plate theory.

I also want to thank my colleagues from the Chair of Applied Mechanics. Furthermore, I thank Michaela Reimringer for improving my English.

Finally, I would like to gratefully thank my family and friends for their support and understanding during my studies. Last but not least, I would like to thank my husband Thomas for his precious support, love and understanding. He provided the trust and courage I needed to achieve this work and succeeded in making me happy even in the most difficult moments.

Abstract

Composite plates, such as sandwich structures or hybrid laminates, are widely used in the field of transport industry, due to their outstanding mechanical properties for a relatively reduced weight. However, they show a complex material behaviour, which can not be properly described by using a simple mixture rule. Moreover, it can be necessary to model non-linear material behaviour -like for instance plasticity- if dealing with a forming process. Due to the restriction of most of the plate theories to linear material behaviour, the development of a numerical multi-scale modelling of composite plates is of interest.

In the presented work, the modelling of the mechanical behaviour of composite plates is based on a numerical homogenisation, or so-called FE^2 , for composite plates. The principle is to split the problem into two characteristic scales: on the one hand, the macroscale, containing the kinematics of the plates, and on the other hand, a so-called mesoscale, discretizing the layers stacking order with their individual properties.

In this work, special attention is paid towards the definition of the analytical tangent using the Multi-Level Newton Algorithm (MLNA) and towards the resolution of the Poisson's thickness locking phenomenon, enabling the consideration of the thickness change by an improved projection strategy. The validity of the proposed method towards linear and non-linear material behaviour is verified using various numerical experiments.

Zusammenfassung

Verbundstrukturen finden heutzutage, aufgrund ihrer interessanten mechanischen Eigenschaften bei relativ niedrigem Gewicht, immer mehr Anwendung im Bereich der Transportindustrie. Allerdings weisen Verbundstrukturen auch ein komplexes mechanisches Verhalten auf. Zudem kann die Modellierung von nicht-linearem Materialverhalten notwendig werden, wie zum Beispiel von Plastizität, wenn ein Tiefziehen durchgeführt werden soll. Aufgrund der Begrenzung der meisten Plattentheorien zu linearem Materialverhalten, wird eine numerische Mehrskalensimulation für Kompositplatten entwickelt.

In dieser Arbeit wird die Modellierung des mechanischen Verhaltens von Kompositplatten mit einer numerischen Homogenisierung, auch FE^2 genannt, weiterentwickelt. Das Prinzip der FE^2 für Platten basiert auf der Teilung des Problems in zwei Skalen: einerseits wird die Makroskala, die die Plattenkinematik enthält, betrachtet und andererseits wird die sogenannte Mesoskala, die die Einzelschichten diskretisiert, berücksichtigt.

In der vorliegenden Arbeit soll der Definition der analytischen Tangente mit dem Multi-Level Newton Algorithm (MLNA) und der Lösung des Poissons Locking besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden, welche die Dickenänderung mit einer verbesserten Projektionsmethode berücksichtigt. Anschließend wird die Verifizierung der Mehrskalensmethode für lineares und nicht-lineares Materialverhalten durchgeführt, die im Rahmen unterschiedlicher numerischer Experimente angewendet wird.

Résumé

Les matériaux composites, comme par exemple les structures sandwich ou les matériaux laminaires hybrides, trouvent de nos jours de plus en plus d'utilisations dans l'industrie du transport, en raison de leurs bonnes propriétés mécaniques pour un poids relativement réduit. Cependant, ce type de structures présente un comportement mécanique très complexe, qui ne peut être décrit qu'imparfaitement par une loi des mélanges. De plus, il peut être nécessaire de prendre en considération des lois de comportement non-linéaire -par exemple la plasticité- comme c'est dans le cas pour un emboutissage. La plupart des théories des plaques se limitant à des lois de matériaux linéaires, une méthode multi-échelles numérique est utilisée pour la modélisation du comportement mécanique de plaques composites.

Dans le cadre de ce travail, la modélisation du comportement mécanique des plaques composites est effectuée par une méthode d'homogénéisation numérique, ou autrement appelée FE^2 , adaptée aux plaques. Le principe consiste en la séparation du problème en deux échelles: d'une part, l'échelle macroscopique, qui contient la cinématique d'une plaque, et d'autre part, l'échelle mésoscopique, qui décrit l'ordre des couches avec leurs différentes propriétés.

Dans le cadre de cette thèse, une attention particulière est donnée à la définition d'une tangente analytique par l'Algorithme Multi-Level de Newton (MLNA), ainsi qu'à la résolution du problème de locking de Poisson, grâce à une amélioration de la méthode de projection. Dans une dernière partie, la validité de la méthode pour des lois de matériaux linéaires et non-linéaires est vérifiée dans le cadre d'expériences numériques.

Contents

1	Introduction	1
1.1	Motivation	1
1.2	State of the Art	3
1.3	Objectives of the Work	8
1.4	Outline	9
1.5	Notations	9
2	Continuum Mechanics	11
2.1	Kinematics	12
2.2	Balance Relations	17
2.2.1	Balance of Mass	17
2.2.2	Balance of Momentum	18
2.2.3	Balance of Moment of Momentum	19
2.2.4	Balance of Energy or First Law of Thermodynamics	20
2.2.5	Balance of Entropy or Second Law of Thermodynamics	21
2.3	Constitutive Equations	22
2.3.1	General Considerations	22
2.3.2	Hyperelasticity	24
2.3.3	Viscoplasticity	30
3	Macroscale: Plate Theory	43
3.1	Short Historic Introduction	43
3.2	Strong Formulation	46
3.2.1	Assumptions Towards the Plate Theory	46
3.2.2	Kinematics	47
3.2.3	Stress, Moment and Higher Order Resultants	49
3.2.4	Balance Equations	51
3.3	Weak Formulation	52
3.4	Convergence and Locking	54
3.5	Conclusions	59
4	Numerical Homogenisation of Plates	60
4.1	Plate Kinematics	62
4.2	Projection	64
4.2.1	General aspects	64
4.2.2	Taylor Development of the Macroscopic Field	64
4.2.3	Fluctuations	65
4.2.4	Deformation Modes	67

4.3	Boundary Value Problem of the Mesoscale	71
4.4	Meso-Macro Transition	72
4.4.1	Hill-Mandel Condition	72
4.4.2	Analytical Tangent: use of the MLNA	73
5	Applications	78
5.1	Validation	78
5.1.1	Uniaxial Tension Test	79
5.1.2	Shear Test	85
5.1.3	Equi-biaxial Tension Test	87
5.1.4	Bending Test	91
5.1.5	Hybrid Laminate	98
5.2	Non-Linear Material Behaviour	103
5.2.1	Uniaxial Tension Test	104
5.2.2	Shear Test	106
5.2.3	Biaxial Tension Test	108
5.2.4	Bending Test	110
5.3	Cook's Membrane	112
5.4	Plate with Hole	115
5.5	Pagano Problem	119
6	Conclusions	122
7	Appendix	125
7.1	Voigt Notation	125
7.2	Elasto-Plasticity for Finite Strains	126
7.3	Pegasus Method	126
7.4	Constitutive Law for the Plate Theory	127
7.5	Symmetric Stiffness for the Plate Theory with Thickness Change	129
	Bibliography	131