Zwei Freunde, die sich für Portfoliotheorie interessieren, unterhalten sich:

→ Ich wollte mein Portfolio umstrukturieren. Ausgehend von meinem ursprünglichen Portfolio habe ich versucht, bei gleicher Rendite die Schwankung meines Portfolios zu reduzieren. Dabei habe ich festgestellt, dass ich gar nicht alle meiner ursprünglichen Aktien brauche, um eine niedrigere Volatilität zu erzielen.

→ Das ist richtig. Aber wenn du weniger Aktien in deinem Portfolio hast, dann steht dein Portfolio in einer höheren Abhängigkeit von Einzelpositionen und kann damit schlechter diversifiziert sein.

→ Das bedeutet, dass ich mit meinem neuen Portfolio zwar eine niedrigere Volatilität habe, aber trotzdem ein höheres Risiko für einen großen Verlust, weil ich schlechter diversifiziert bin?

→ Ja, das kann sein, weil der Diversifikationsgrad bei deiner Entscheidung für dein Portfolio keine explizite Rolle gespielt hat.

→ Und wie kann ich den Diversifikationsgrad in meine Entscheidung einfließen lassen?

→ Das geht mit dem EigenRisiko-Modell.

Risikoproportion und EigenRisiko-Portfolio

– Risikomessung von Portfolios und Portfolioauswahl mit dem EigenRisiko-Modell –

Dr. Martin Poos

Lehrstuhl für Statistics and Econometrics
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

27. Februar 2013

Hinweis

In dieser Präsentation wird kurz und kompakt zusammengefasst, was in dem Buch

Risikoproportion und EigenRisiko-Portfolio
– Risikomessung von Portfolios und Portfolioauswahl mit dem EigenRisiko-Modell –

mit der ISBN 978-3-8440-1492-1 ausführlich dargestellt wird.

Kontakt: eigenrisiko@gmail.com

Inhaltsverzeichnis

1. Kontext – Risiko- und Portfoliotheorie
   - Begrifflichkeiten
   - Rendite- und Risikodimension
   - Portfolioauswahl
   - Systematisches und unsystematisches Risiko
2. Das EigenRisiko-Modell (ERM)
   - Die absolute Risikoproportion κ
   - Das EigenRisiko-Portfolio
   - Die (relative) Risikoproportion ϕ
   - Zusammenfassung
3. Anwendungsvoraussetzungen des ERM
   - Berechnungsbasis
   - Korrelationsstruktur der Risikofaktoren
   - Größenordnung der Varianzen
4. Fazit zum EigenRisiko-Modell

Risikofaktor

(Zufälliges) Ereignis, dessen Zustand in der Zukunft unsicher ist, beispielsweise ein Aktienpreis. Formal können Risikofaktoren mit Zufallsvariablen und Verteilungsfunktionen erfasst werden.

Risikofaktorset

Eine Vielzahl von Risikofaktoren.

Portfolio

Eine Linearkombination des zugrundeliegenden Risikofaktorsets.

Beispiel Aktienportfolio: Um den Wert eines Aktienportfolios zum Zeitpunkt t zu ermitteln, werden die einzelnen Risikofaktoren/Aktien X_{it} mit ihren Linearkoeffizienten multipliziert und dann aufsummiert, wobei die Linearkoeffizienten die Stückzahlen h_i der entsprechenden Risikofaktoren sind, mit denen diese im Portfolio enthalten sind:

$$\begin{aligned} P_t &= X_{1t} \cdot h_1 + X_{2t} \cdot h_2 + \ldots + X_{nt} \cdot h_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} X_{it} \cdot h_i. \end{aligned}$$

.

Portfoliomanagement

Anpassung der Eigenschaften eines Portfolios an die Präferenzen des Entscheidungsträgers.

Beschreibung der Portfolioeigenschaften

Durch Verteilungsparameter:

- Erstes Moment um 0: Erwartete Rendite
- Zweites Moment um das arithmetische Mittel: Portfoliovarianz

Markowitz und Tobin haben daraus eine Theorie zur Portfolioauswahl entwickelt und Sharp hat es in ein Modell überführt um Gleichgewichtspreise abzuleiten (CAPM).

- Quantile der Verteilung: Value-at-Risk
- Bedingte Momente: Lower-Partial-Moments

Diese spielen insbesondere im modernen Risikomanagement eine wichtige Rolle.

Problem der Verwendung von Verteilungsparametern

Die Verteilung des Portfolios soll so bestimmt werden, dass die Verteilung für das Portfolio als typisch anzusehen ist. Wenn die Verteilung als typisch anzusehen ist, handelt es sich um eine Verteilung im Normalbelastungsfall. Das Risiko in Stress-Situationen kann demnach über die Renditeverteilung im Normalbelastungsfall nicht erfasst werden, unabhängig davon ob Momente, bedingte Momente oder Quantile der Verteilung betrachtet werden.

Ergänzung der Risikobeschreibung

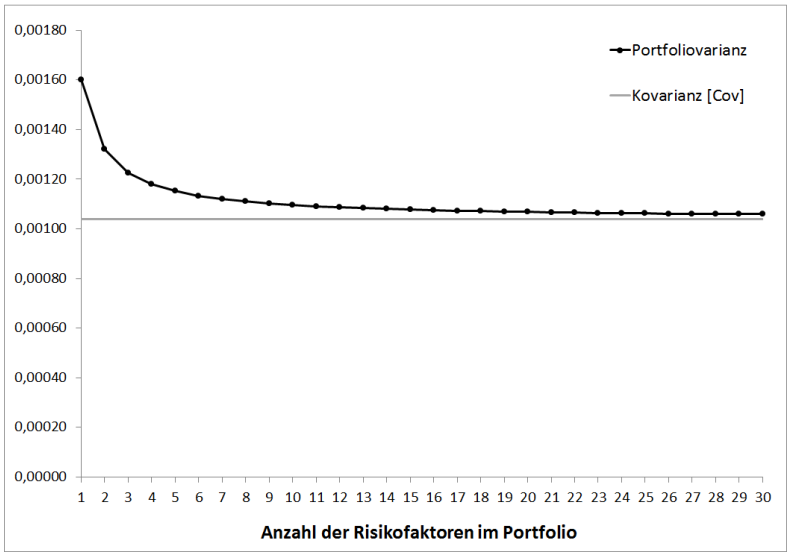
Die im EigenRisiko-Modell abgeleitete Risikoproportion basiert **nicht** auf der Renditeverteilung des Portfolios und misst die Abhängigkeit der Portfoliowertentwicklung von Einzelpositionen im Portfolio. Sie ist damit eine Kennzahl zur Messung des Diversifikationsgrades eines Portfolios.

Diversifikation

Unter Diversifikation versteht man die Investition in mehrere Risikofaktoren, um nicht in Abhängigkeit von Einzelpositionen zu stehen und damit die Wahrscheinlichkeit für substantielle Verluste oder gar einen Totalverlust zu reduzieren.

Problem der Beschreibung der Diversifikation über die Portfoliovarianz

Häufig wird der Diversifikationseffekt am Sinken der Portfoliovarianz bei steigender Anzahl an Risikofaktoren festgemacht.



Allerdings ist es möglich, Portfolios auf Basis von beispielsweise 3 und 20 Risikofaktoren zu erzeugen, die die gleiche Varianz besitzen, demnach in Bezug auf ihr Risiko bei Verwendung der Varianz gleich einzuschätzen wären, obwohl das Portfolio aus 20 Risikofaktoren offensichtlich weniger riskant ist, wenn die Chance für einen substantiellen Verlust oder einen Totalverlust betrachtet wird.

Ursache

Über die Varianz wird (lediglich) eine mittlere Schwankungsintensität des Portfolios angegeben. Informationen darüber, ob diese Schwankung auf Basis der Zusammenhänge zwischen 3 oder 20 Risikofaktoren zustande kommt, sind in der Varianz nicht enthalten.

Schwankung und Diversifikation

Wenn ein positiver Zusammenhang zwischen Rendite und Risiko bzw. Schwankungsverhalten besteht – wie es häufig unterstellt wird – dann ist hohes Schwankungsverhalten etwas positives. Schlecht ist das hohe Schwankungsverhalten nur dann, wenn außerordentliche Schwankungen auf mangelnde Diversifikation zurückzuführen sind. Wenn aber sichergestellt ist, dass es sich um ein diversifiziertes Portfolio handelt, dann ist eine hohe Schwankung etwas positives bzw. etwas notwendiges, um eine hohe Rendite zu erzielen.

μ-σ-Kriterium

In der klassischen Portfoliotheorie, die durch Markowitz, Tobin und Sharpe geprägt wurde, wird die Entscheidung (unter Unsicherheit) für ein Portfolio mit der erwarteten Rendite μ und der Volatilität $\sigma = \sqrt{Varianz}$ getroffen, wobei μ die Renditedimension und σ die Risikodimension abbildet. Es soll ein Portfolio ausgewählt werden, das effizient in Bezug auf μ und σ ist.

Problem der klassischen Portfoliotheorie - Folie 1/4

Da der Diversifikationsgrad über die Varianz nicht erfasst wird, ist das Ergebnis der μ-σ-Optimierung als problematisch anzusehen. Denn wenn ein Portfolio auf dem effizienten Rand ausgewählt wird, über die Diversifikationseigenschaften des Portfolios aber nichts bekannt ist, dann besteht die Möglichkeit, in ein schlecht diversifiziertes Portfolio zu investieren, das eine starke Abhängigkeit von Einzelpositionen besitzt. Da keine Kennzahl zur Messung der Diversifikation in die μ-σ-Optimierung einfließt, besteht vor und nach der μ-σ-Optimierung Unsicherheit bezüglich des Diversifikationsgrades.

Problem der klassischen Portfoliotheorie - Folie 2/4

Schon *Harry Markowitz* hat 1952 in seinem Aufsatz *Portfolio Selection* auf S. 82 auf dieses Problem hingewiesen:

"[...] Earlier we rejected the expected returns rule on the grounds that it never implied the superiority of diversification. The expected return- variance of return rule, on the other hand, implies diversification for a wide range of μ_i, σ_{ij}. This does not mean that the E-V rule never implies the superiority of an undiversified portfolio. It is conceivable that one security might have an extremely higher yield and lower variance than all other securities; so much so that one particular undiversified portfolio would give maximum E and minimum V. But for a large, presumably representative range of μ_i, σ_{ij} the E-V rule leads to efficient portfolios almost all of which are diversified. [...]"

Problem der klassischen Portfoliotheorie - Folie 3/4

Da also die Gefahr besteht, in ein undiversifiziertes Portfolio zu investieren und keine Kennzahl zur Unterscheidung verschiedener Diversifikationsgrade bei der Optimierung über μ und σ berücksichtigt wird, muss man entweder hoffen, dass das ausgewählte Portfolio diversifiziert ist, oder mit sachlogischen Argumenten arbeiten. Eine sachlogische Argumentation erhöht den Aufwand, verschiedene Portfolios in Bezug auf den Diversifikationsgrad zu unterscheiden, jedoch erheblich im Vergleich zu der Situation, in der eine Kennzahl zum Vergleich der Diversifikation bereit steht.

Problem der klassischen Portfoliotheorie - Folie 4/4

Damit läuft die klassische Portfoliotheorie Gefahr, den Kern des Diversifikationsstrebens von Investoren nicht zu erfassen, nämlich die Wahrscheinlichkeit für einen Totalverlust (in einer Stress-Situation) zu reduzieren.

Ursache des Problems der klassischen Portfoliotheorie

Die systematischen und unsystematischen Risikoanteile, die im CAPM von Sharpe identifiziert wurden, werden bei der Berechnung der Portfoliovarianz gemischt.

Aufspaltung des Gesamtrisikos

Im CAPM wird das Gesamtrisiko in systematisches und unsystematisches Risiko unterteilt. Das unsystematische Risiko kann durch Diversifikation reduziert werden, das systematische Risiko nicht. Die Risikoanteile können durch ein Beispiel mit der Portfoliovarianz gezeigt werden, in dem die Grenzwerte der Portfoliovarianz bei Investition in einen und unendlich viele Risikofaktoren berechnet werden.

Portfoliovarianz und Beispiel

Die Portfoliovarianz ist eine Linearkombination der Varianzen und Kovarianzen der Risikofaktorrenditen, wobei die relativen Anteile im Portfolio die Linearkoeffizienten sind.

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(r_P) &= w^T \Sigma w = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \mathrm{Cov}(r_i; r_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \mathrm{Var}(r_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \mathrm{Cov}(r_i; r_j)\end{aligned}$$

Im Beispiel haben alle Risikofaktoren die gleiche Varianz [Var] sowie die gleichen paarweisen Kovarianzen [Cov] untereinander und werden alle mit dem gleichen Anteil $\left(\frac{1}{n}\right)$ in das Portfolio aufgenommen.

Numerik des Beispiels

Damit kann die Portfoliovarianz vereinfacht geschrieben werden als:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(r_P) &= \sum_{i=1}^{n} w_i^2[\mathrm{Var}] && + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j[\mathrm{Cov}] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2[\mathrm{Var}] && + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)[\mathrm{Cov}] \\
&= n\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2[\mathrm{Var}] && + 2\cdot\left(\frac{n\cdot(n-1)}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2[\mathrm{Cov}] \\
&= \left(\frac{1}{n}\right)\cdot[\mathrm{Var}] && + \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot[\mathrm{Cov}]. \quad (1)
\end{aligned}$$

Betrachtung der Grenzfälle - unsystematisches und systematisches Risiko

Aus Formel 1 folgt für die Portfoliovarianz bei der Investition in nur einen Risikofaktor ($n = 1$):

$$\lim_{n \to 1} \text{Var}(r_P) = [\text{Var}],$$

und bei der Investition in unendlich viele Risikofaktoren ($n \to \infty$):

$$\lim_{n \to \infty} \text{Var}(r_P) = [\text{Cov}].$$

Demnach kann die gewichtete Summe der Kovarianzen als systematisches Risiko und die gewichtete Summe der Einzelvarianzen als unsystematisches Risiko interpretiert werden.

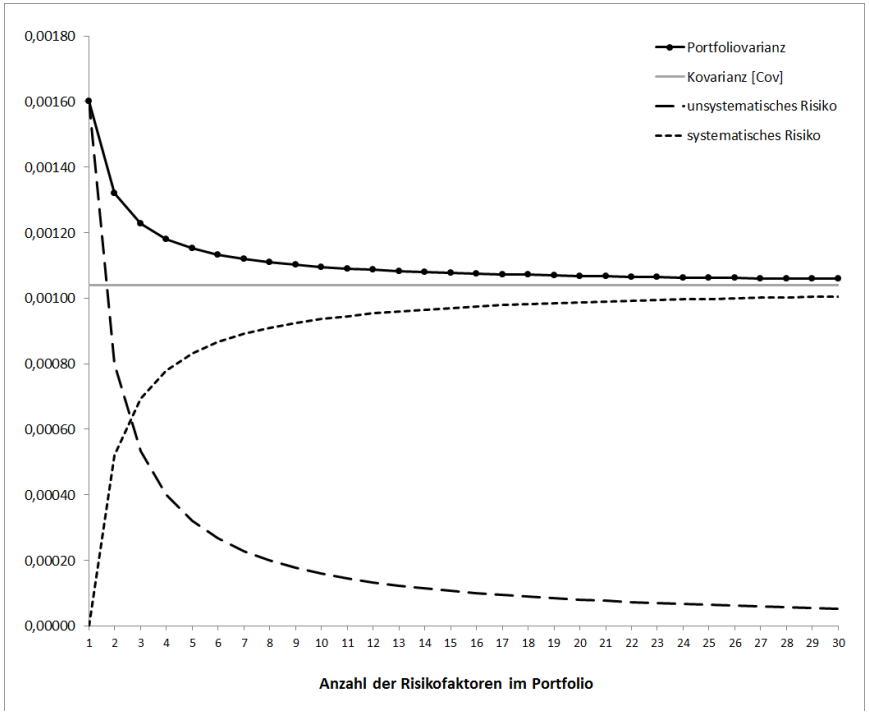
Varianz-Kovarianz-Matrix (VKM)

Die unsystematischen Anteile stehen auf der Hauptdiagonalen der Varianz-Kovarianz-Matrix und die Nebendiagonalelemente sind die systematischen Risikoanteile.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \sigma_{n-1n} \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn-1} & \sigma_n^2 \end{pmatrix}.$$

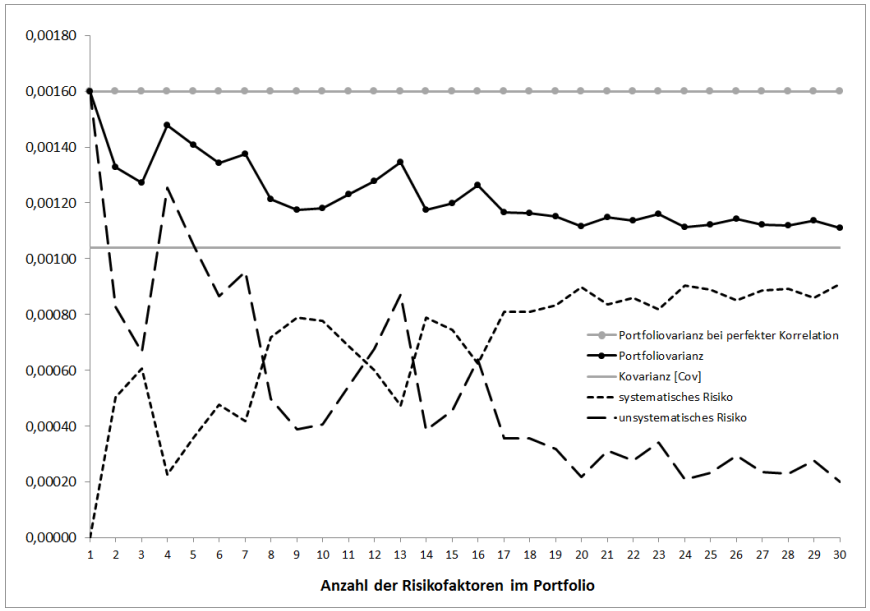
Visualisierung der systematischen und unsystematischen Risikoanteile im Beispiel - Folie 1/3

– Die Portfoliovarianz konvergiert im Beispiel mit steigender Zahl der Risikofaktoren gegen die durchschnittliche Kovarianz,
– die Summe aus unsystematischem und systematischem Risikoanteil ist das Gesamtrisiko, nämlich die Varianz, und
– der unsystematische Anteil wird im Beispiel mit steigendem n kleiner.



Visualisierung der systematischen und unsystematischen Risikoanteile im Beispiel - Folie 2/3

Wenn der unsystematische Anteil mit steigendem n immer kleiner werden würde, gäbe es kein Problem. Im Beispiel ist dies jedoch nur der Fall, weil alle Varianzen, Kovarianzen und alle Anteile gleich sind. Allein durch Variation der Anteile können unabhängig von der Anzahl der Risikofaktoren schlechter und besser diversifizierte Portfolios erzeugt werden.



Visualisierung der systematischen und unsystematischen Risikoanteile im Beispiel - Folie 3/3

Dementsprechend können – in Abhängigkeit von der Gewichtung der Risikofaktoren – Portfolios auf Basis des gleichen Risikofaktorsets unterschiedliche Anteile an unsystematischem und systematischem Risiko haben und dementsprechend unterschiedlich gut diversifiziert sein.

EigenRisiko-Modell

Das EigenRisiko-Modell ist ein Modell zur Portfolioauswahl, wobei die Entscheidung unter Unsicherheit wie in der klassischen Portfoliotheorie auf Basis einer Rendite- und einer Risikodimension getroffen wird, allerdings wird zur Erfassung des Risikos keine Streuungs- bzw. Schwankungskennzahl verwendet, sondern eine Kennzahl, die den unsystematischen und systematischen Risikoanteil im Portfolio erfasst und damit das Ausmaß der Diversifikation berücksichtigt.

Diese Kennzahl ist die Risikoproportion.

absolute Risikoproportion κ- Folie 1/2

Die absolute Risikoproportion κ setzt den unsystematischen Risikoanteil ins Verhältnis zum systematischen Risikoanteil.

$$\kappa(w) = \frac{\textit{unsystematisches Risiko}}{\textit{systematisches Risiko}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}}$$

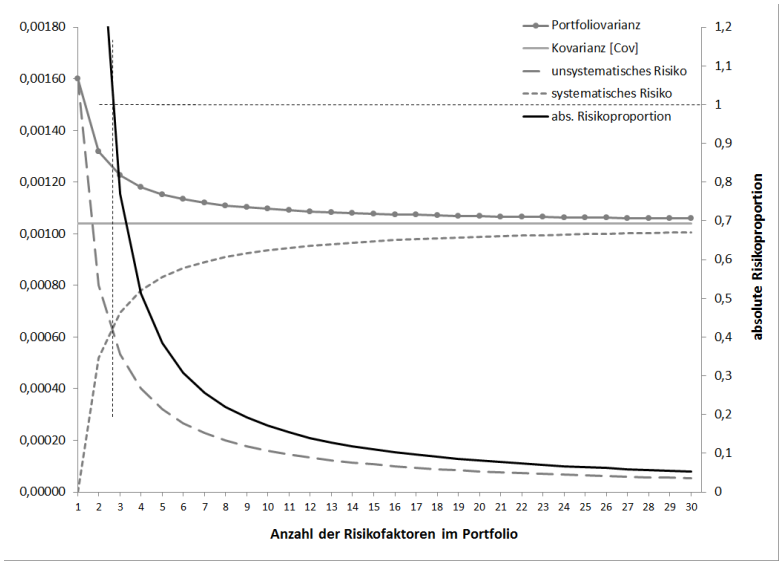
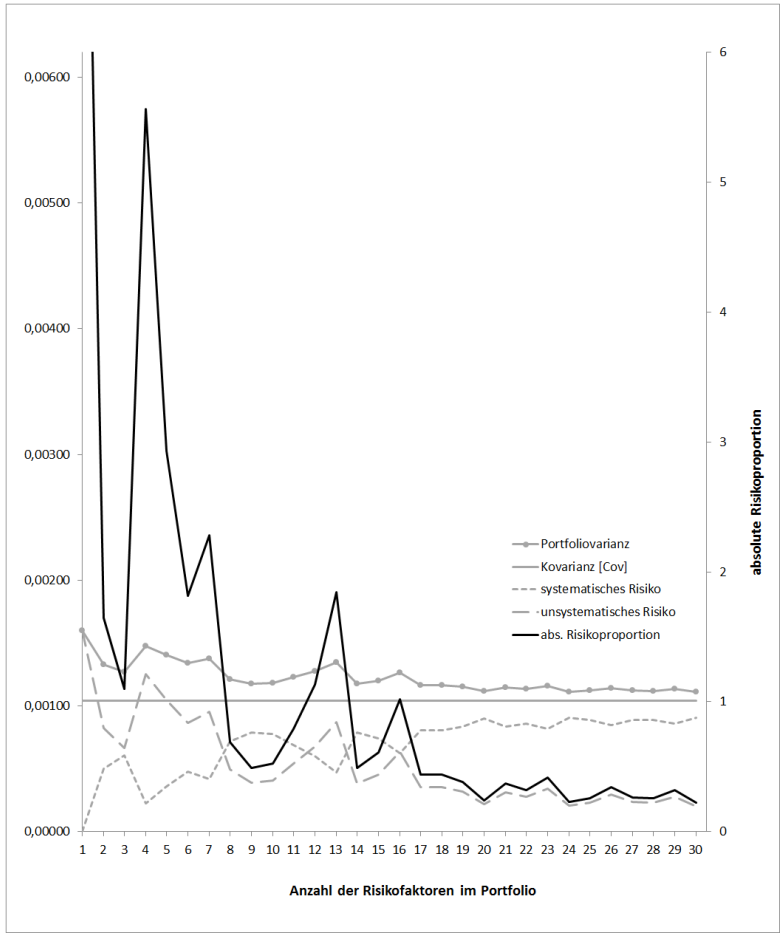


Abbildung 1: absolute Risikoproportion

absolute Risikoproportion κ - Folie 2/2

Das Verhältnis in dem der unsystematische zum systematischen Risikoanteil steht, wird im Folgenden als Risikostruktur bezeichnet, über die der Diversifikationsgrad gemessen wird.

Immer wenn der unsystematische Risikoanteil in einem Portfolio größer ist als der systematische Risikoanteil, weist die absolute Risikoproportion einen Wert größer 1 auf.



Fehlende Normierung der absoluten Risikoproportion

Allerdings kann die Höhe der absoluten Risikoproportion – wie in Abbildung 1 zu sehen ist – von der Anzahl der Risikofaktoren im Portfolio abhängen und ist damit nicht über verschiedene Portfolios auf Basis unterschiedlicher Risikofaktorsets vergleichbar. Um die absolute Risikoproportion vergleichbar zu machen muss sie normiert werden. Die normierte Risikoproportion ist die relative Risikoproportion. Mit ihr kann der Diversifikationsgrad von Portfolios auf Basis unterschiedlicher Risikofaktorsets verglichen werden. Die Normierung findet über das EigenRisiko-Portfolio statt.

EigenRisiko-Portfolio

Das EigenRisiko-Portfolio ist ein diversifiziertes Portfolio mit bedingt maximaler Varianz, das bei einem positiven Zusammenhang zwischen Rendite und Risiko/Volatilität/Varianz auch eine bedingt maximale Rendite aufweist. Das EigenRisiko-Portfolio basiert auf dem gleichen Risikofaktorset wie das ursprüngliche Portfolio, allerdings wird die Anteilsstruktur des ursprünglichen Portfolios so variiert, dass es zu einem diversifizierten und bedingt renditemaximalen Portfolio wird. Die Anteile des EigenRisiko-Portfolios werden bestimmt, indem eine Linearkombination identifiziert wird, die eine maximale Varianz hat und gleichzeitig diversifiziert ist. Die Nebenbedingung der Diversifiziertheit sorgt dafür, dass die Portfoliovarianz nicht dadurch maximiert wird, dass der Risikofaktor mit der größten Varianz zu 100% in das Portfolio einfließt, sondern alle ursprünglichen Risikofaktoren im Portfolio vertreten sind.

Bestimmung des EigenRisiko-Portfolios - Folie 1/4

Über einen Lagrange-Ansatz kann das Maximierungsproblem geschrieben werden als

$$\mathcal{L} = w^T \Sigma w - \lambda(\mathit{Nebenbedingung}) \rightarrow \mathit{Max}!$$

Dabei sorgt die Nebenbedingung im Lagrange-Ansatz dafür, dass die maximale Varianz zu einer auf die Länge 1 normierten Linearkombination gefunden wird, weil die Portfoliovarianz sonst maximal wird, wenn alle Anteile unendlich groß sind. Der Vektor der Linearkombinationen hat gemäß des Satz von Pythagoras eine Länge von 1, wenn die Summe der quadrierten Anteile 1 ergibt:

$$1 = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 = w^T w.$$

Bestimmung des EigenRisiko-Portfolios - Folie 2/4

Das Maximierungsproblem kann durch Äquivalenzumformungen so umgewandelt werden, dass die Koeffizienten durch die Lösung eines Eigenwertproblems bestimmt werden können:

$$\mathcal{L} = w^T \Sigma w - \lambda(w^T w - 1) \rightarrow Max!$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} = 2\Sigma w - 2\lambda w = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \Sigma \cdot w = \lambda \cdot w$$

Die Portfoliovarianz λ wird dann maximiert, wenn für w der Eigenvektor q_1 ausgewählt wird, der zum größten Eigenwert λ_1 gehört.

$$\Sigma \cdot q_1 = q_1 \cdot \lambda_1$$

$$\Leftrightarrow \quad q_1^T \cdot \Sigma \cdot q_1 = q_1^T \cdot q_1 \cdot \lambda_1$$

$$\Leftrightarrow \quad q_1^T \cdot \Sigma \cdot q_1 = 1 \cdot \lambda_1$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_1 = q_1^T \Sigma q_1$$

Es gibt keine normierte Linearkombination, die zu einer größeren Portfoliovarianz führt als q_1.

Bestimmung des EigenRisiko-Portfolios - Folie 3/4

Für den Portfoliozusammenhang sind die Anteile bzw. die Eigenvektorkoeffizienten, deren quadrierte Summe 1 ergibt, aber ungeeignet, weil hier die Summe der nicht-quadrierten Anteile 1 ergeben muss: $1 = \sum_{i=1}^{n} w_i$. Wird aber diese Bedingung im Lagrange-Ansatz verwendet, wird dem Risikofaktor mit der größten Varianz das Gewicht 1 zugewiesen und allen anderen Risikofaktoren das Gewicht 0. Durch diese Normierung wird folglich der Diversifikationseffekt nicht erfasst.

Bestimmung des EigenRisiko-Portfolios - Folie 4/4

Demnach könnte die Wurzel aus den Anteilen gezogen werden, deren quadrierte Summe 1 ergibt, um dieses Problem zu lösen, allerdings würde dann die Richtung des Eigen- bzw. Anteilsvektors w verändert, so dass der so entstehende Vektor nicht mehr die varianzmaximale Linearkombination ist. Alternativ kann der Vektor durch die Summe seiner Elemente dividiert werden, wodurch die Richtung des Vektors unverändert bleibt. Diese Koeffizienten werden als standardisierte Koeffizienten bezeichnet.

$$q_{i1}^{stand} = \frac{q_{i1}^{norm}}{\sum_{i=1}^{n} q_{i1}^{norm}} = q_1^{norm} \cdot c = q_{i1}^{*}.$$

Die Varianz, die sich durch Verwendung dieser Anteile ergibt ist die Eigenvarianz des Portfolios und misst das EigenRisiko.

EigenRisiko

Das EigenRisiko-Portfolio ist also bestimmt über die Risikofaktoren, die mit den standardisierten Eigenvektorkoeffizienten gewichtet werden. Das Risiko dieses Portfolios wird als EigenRisiko bezeichnet.

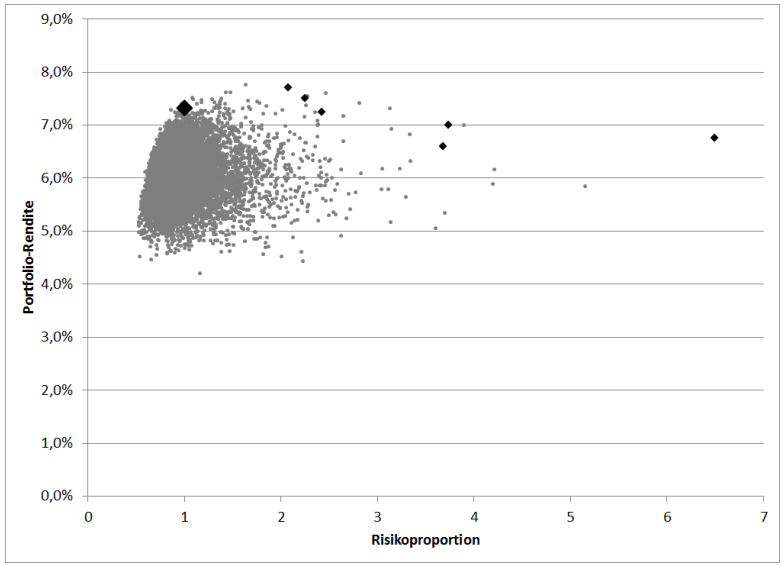
relative Risikoproportion ϕ

Da jetzt das Referenzportfolio bekannt ist, kann die absolute Risikoproportion normiert werden, indem die absolute Risikoproportion des betrachteten Portfolios dividiert wird durch die absolute Risikoproportion des EigenRisiko-Portfolios:

$$\phi(w) = \frac{\kappa(w)}{\kappa(q_1^*)}.$$

Portfolioauswahl im EigenRisiko-Modell

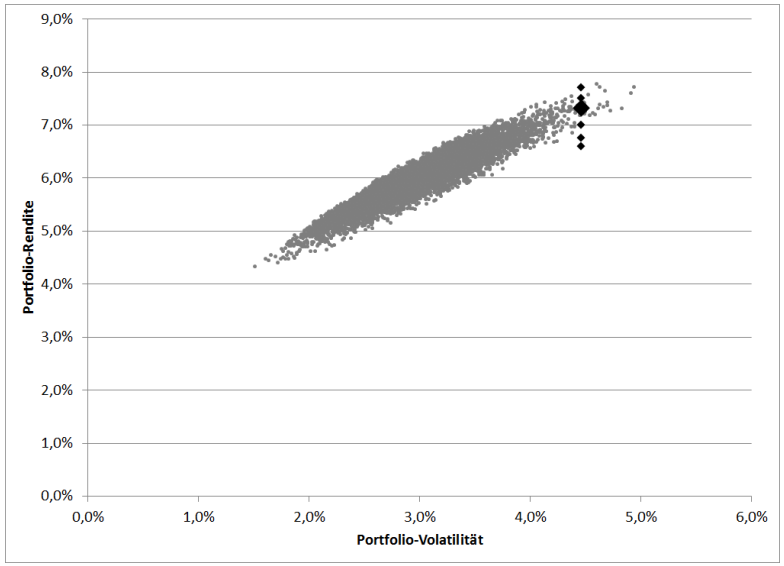
Das EigenRisiko-Portfolio ist als Referenzpunkt geeignet, denn es ist – unter bestimmten wenig restriktiven Voraussetzungen – diversifiziert und bei einem positiven Zusammenhang zwischen Rendite und Risiko/Volatilität bedingt renditemaximal. In diesem Fall ist es μ-ϕ-effizient und die Anlage in das EigenRisiko-Portfolio damit für einen risikoaversen Entscheider rational.



Die große Raute steht für das EigenRisiko-Portfolio, die kleinen Rauten sind...

Anwendungen der Risikoproportion - 1 - Folie 1/2

... Portfolios, die alle die gleiche Varianz und die gleiche Renditeverteilung (Vgl. die Tabelle auf der nächsten Folie) haben wie das EigenRisiko-Portfolio, demnach bei Abbildung des Risikos durch die Volatilität in Bezug auf die Risikodimension gleich zu beurteilen wären.



Anwendungen der Risikoproportion - 1 - Folie 2/2

Durch Betrachtung der Risikoproportion ist es jedoch möglich, den Diversifikationsgrad der Portfolios zu unterscheiden und damit eine weitere Facette des Risiko zu erfassen.

		Perzentil						
Portfolio	Min.	5	25	50	75	95	99	Max.
ER-PF	-,42	-,04	-,01	,00	,01	,04	,08	,35
1	-,81	-,04	-,01	,00	,01	,04	,09	,51
2	-,59	-,04	-,01	,00	,01	,04	,08	,40
3	-,46	-,04	-,01	,00	,01	,04	,08	,38
4	-,41	-,04	-,01	,00	,01	,04	,08	,40
5	-,22	-,04	-,01	,00	,01	,04	,08	,42
6	-,22	-,04	-,01	,00	,01	,04	,07	,43

	Kennzahlen				
Portfolio	Rendite	σ	κ	ϕ	Anzahl der Risikofaktoren
ER-PF	0,0732	0,0446	0,71	1	7
1	0,0770	0,0446	1,49	2,08	5
2	0,0750	0,0446	1,61	2,25	6
3	0,0725	0,0446	1,73	2,43	6
4	0,0700	0,0446	2,67	3,74	5
5	0,0675	0,0446	4,64	6,49	5
6	0,0660	0,0446	2,63	3,68	3

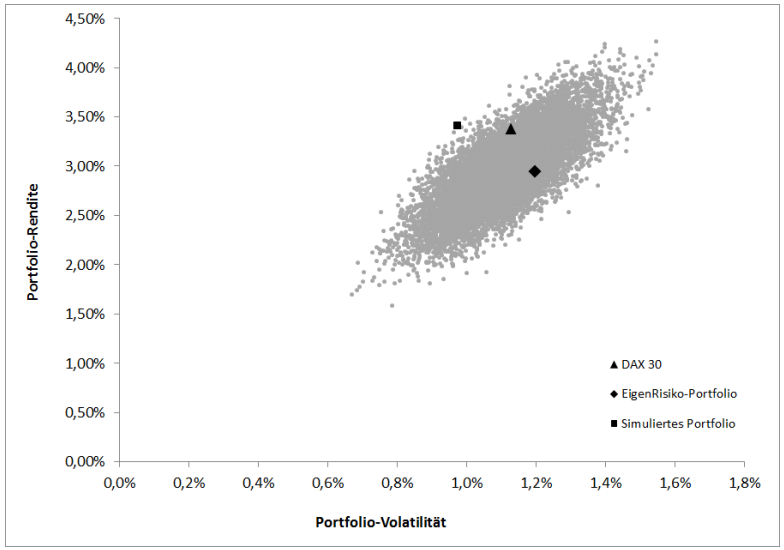
Es wird erkennbar, dass mit einer höheren Rendite nicht unbedingt eine schlechtere Diversifikation einhergehen muss.

Anwendungen der Risikoproportion - 2 - Folie 1/5

Es ist intuitiv, dass schlechter diversifizierte Portfolios (in einer Stress-Situationen) eine höhere Wahrscheinlichkeit dafür aufweisen, an außerordentlichen Kursschwankungen zu partizipieren als besser diversifizierte Portfolios. Durch die Risikoproportion kann diese Intuition quantifiziert werden. Um dies zu veranschaulichen werden drei Portfolios betrachtet. Zum einen das DAX 30 Portfolio, das EigenRisiko-Portfolio auf Basis des DAX 30-Risikofaktorsets und ein simuliertes Portfolio.

Anwendungen der Risikoproportion - 2 - Folie 2/5

Das simulierte Portfolio ist so gestaltet, dass es ausgehend von der DAX-Rendite die Volatilität minimiert, also auf dem effizienten Rand liegt. Bei Verwendung des μ-σ-Kriteriums bei Risikoaversion ist die Investition in das simulierte Portfolio rational, weil es bei der geringsten Schwankung die höchste Rendite erzielt.



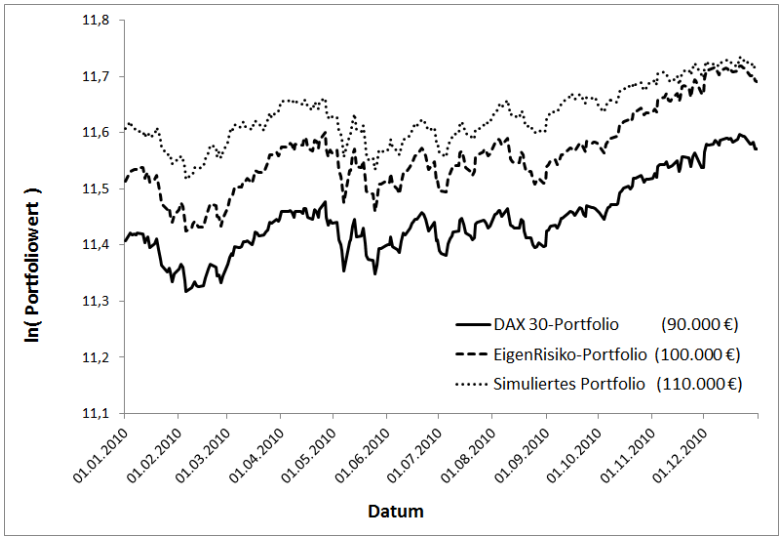
Linearkombination	κ	ϕ	Anzahl RFs	σ in %	μ in %
DAX 30	0,12	1,33	30	1,128	3,38
ER-PF(30)	0,09	1	30	1,198	2,94
Simuliertes PF	0,32	3,51	15	0,973	3,41

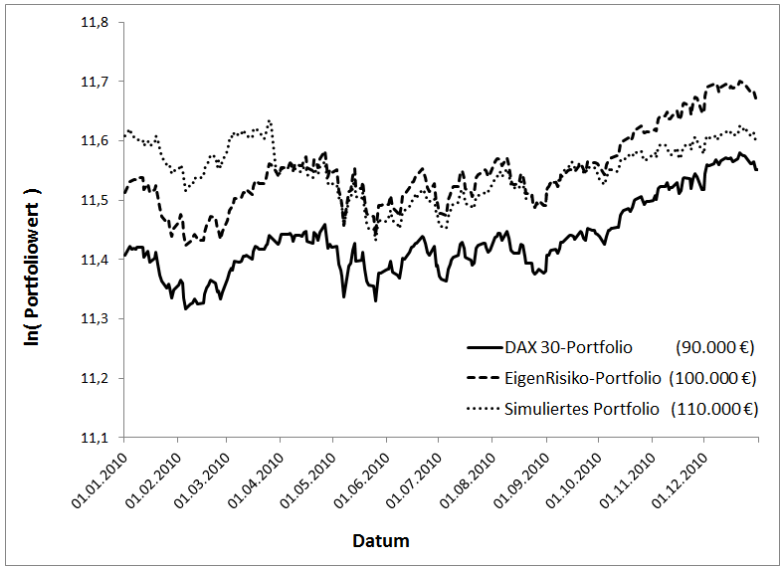
Anwendungen der Risikoproportion - 2 - Folie 3/5

Das simulierte Portfolio besteht allerdings nur noch aus halb so vielen Risikofaktoren wie das DAX- und das EigenRisiko-Portfolio und steht im Vergleich zu diesen demnach in stärkerer Abhängigkeit von Einzelposition.
Durch einen simulierten substantiellen Kursverlust einer Aktie, die in allen drei Portfolios enthalten ist, wird deutlich, welchen Einfluss diese stärkere Abhängigkeit auf den Portfoliowert haben kann.

Anwendungen der Risikoproportion - 2 - Folie 4/5

Während sich der Kursverlauf des DAX- und des EigenRisiko-Portfolios unverändert fortsetzen, fällt der Wert des simulierten Portfolios stark ab.

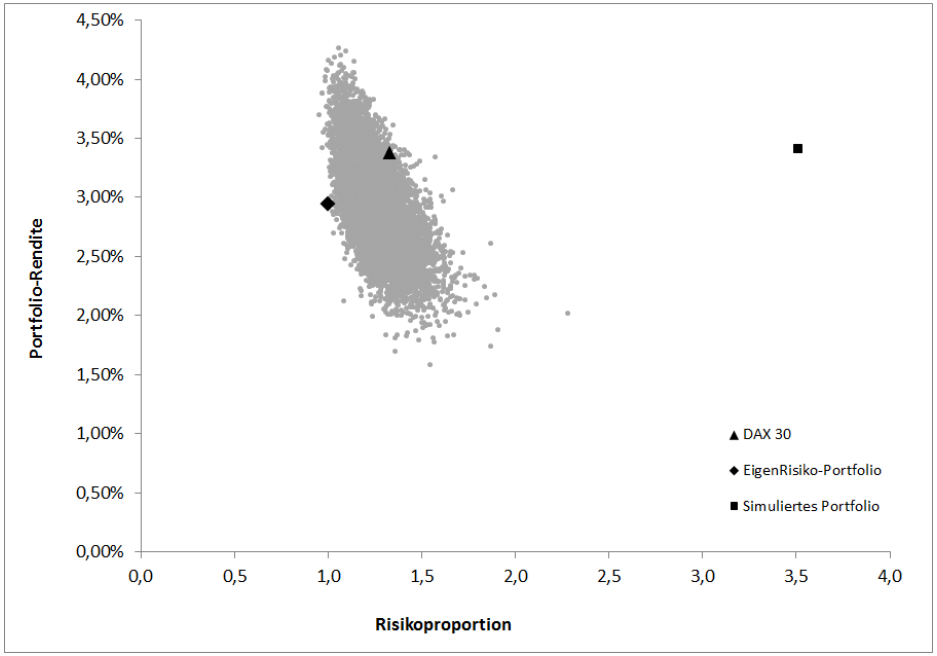




Ursächlich für den starken Kursverfall ist der höhere Anteil der Aktie im simulierten Portfolio, der bei der Messung der Diversifikation über die Risikoproportion erfasst wird.

Anwendungen der Risikoproportion - 2 - Folie 5/5

Durch Betrachtung eines μ-ϕ-Diagramms kann die Abhängigkeit von Einzelpositionen visualisiert werden.



Das höhere Risiko des simulierten Portfolios im Vergleich zu den beiden anderen Portfolios wird hier sichtbar.

Die absolute Risikoproportion κ

Die absolute Risikoproportion quantifiziert die Risikostruktur im Portfolio, indem sie den unsystematischen Risikoanteil ins Verhältnis setzt zum systematischen Risikoanteil. Dabei entspricht der unsystematische Anteil der gewichteten Summe der Kovarianzen und der systematische Anteil der gewichteten Summe der Varianzen. Auf diese Weise wird sowohl die Risikostruktur innerhalb des Portfolios, als auch die Struktur der Anteile im Portfolio explizit berücksichtigt. Die absolute Risikoproportion kann als Kennzahl zur Messung des Diversifikationsgrades von Portfolios auf Basis des identischen Risikofaktorsets verwendet werden.

Die relative Risikoproportion ϕ

Die relative Risikoproportion macht den Diversifikationsgrad über unterschiedliche Risikofaktorsets vergleichbar, indem die absolute Risikoproportion über das EigenRisiko-Portfolio normiert wird. Die relative Risikoproportion informiert darüber, wie die Risikostruktur des betrachteten Portfolios in Vergleich zur Risikostruktur des EigenRisiko-Portfolios einzuordnen ist.

Sie wird im EigenRisiko-Modell als Entscheidungsparameter bei der Portfolioauswahl verwendet, der die Risikodimension abbildet.

Berechnung der Risikoproportion 1/2

Die Berechnung der Risikoproportion erfolgt in mehreren Schritten:

1) Schätzung der Varianz-Kovarianz-Matrix Σ
2) Berechnung des ersten Eigenvektors q_1 von Σ
3) Standardisierung des ersten Eigenvektors:

$$q_1^* = \frac{q_1}{\sum_{i=1}^{n} q_{i1}}.$$

4) Berechnung der Portfolio- und der EigenVarianz:

$$\sigma_P^2 = w^T \Sigma w \quad \text{und} \quad \text{EigVar} = {q_1^*}^T \Sigma q_1^* = \lambda_1 \cdot (\frac{1}{\sum q_{1i}^{norm}})^2 = \lambda_1^*.$$

Berechnung der Risikoproportion 2/2

5) Quantifizierung der Risikostruktur jeweils für das betrachtete und das EigenRisiko-Portfolio:
   i) Berechnung des unsystematischen Risikoanteils:

$$w^T \text{diag}(\Sigma) w \qquad \text{und} \qquad q_1^{*T} \text{diag}(\Sigma) q_1^*.$$

   ii) Berechnung des systematischen Risikoanteils:

$$w^T \Sigma w - w^T \text{diag}(\Sigma) w \qquad \text{und} \qquad q_1^{*T} \Sigma q_1^* - q_1^{*T} \text{diag}(\Sigma) q_1^*,$$

   also jeweils 4) - 5)i).
   iii) Berechnung der absoluten Risikoproportion:

$$\kappa(w) = \frac{w^T \text{diag}(\Sigma) w}{w^T \Sigma w - w^T \text{diag}(\Sigma) w} \qquad \text{und} \qquad \kappa(q_1^*) = \frac{q_1^{*T} \text{diag}(\Sigma) q_1^*}{q_1^{*T} \Sigma q_1^* - q_1^{*T} \text{diag}(\Sigma) q_1^*}$$

   also jeweils $\frac{5)i)}{5)ii)}$.

6) Berechnung der (relativen) Risikoproportion: $\phi(w) = \frac{\kappa(w)}{\kappa(q_1^*)}$.

Anwendung der Risikoproportion

Die Risikoproportion ist erstens dazu geeignet, Portfolios mit gleicher Volatilität und gleicher Renditeverteilung in Bezug auf ihr Risiko unterscheidbar zu machen und zweitens, das Risiko von vielen verschiedenen Portfolios in Stress-Situationen zu beschreiben, ohne für jedes Portfolio einzeln aufwendige Stress-Tests durchführen zu müssen.

Außerdem kann die Risikoproportion aufgrund ihrer Konstruktion, das Risiko außerhalb des Normalbelastungsfalls quantifizieren, obwohl sie auf Basis der Varianzen und Kovarianzen im Normalbelastungsfall bestimmt wird.

Das EigenRisiko-Portfolio

Das EigenRisiko-Portfolio ist ein diversifiziertes Portfolio mit bedingt maximaler Varianz, das bei einem positiven Zusammenhang zwischen Rendite und Risiko bzw. Volatilität auch bedingt renditemaximal ist. Damit ist die Investition in das EigenRisiko-Portfolio für einen risikoaversen Entscheider rational. Es ist – unter bestimmten wenig restriktiven Voraussetzungen – μ-ϕ-effizient.

Varianz-Kovarianz-Matrix und nicht Korrelationsmatrix

Bei der Ermittlung der systematischen und unsystematischen Risikoanteile spielt die Höhe der Varianzen und der Kovarianzen sowie die Struktur der Anteile eine Rolle. Damit ein Risikofaktor mit einer höheren Varianz auch einen höheren Risikobeitrag leistet, ist es notwendig, dass die Zusammenhänge zwischen den Risikofaktoren über die Kovarianzen erfasst werden und demnach das Eigenwertproblem für die VKM und nicht für die Korrelationsmatrix gelöst wird. Denn in der Korrelationsmatrix stehen normierte Zusammenhänge, so dass unterschiedlich hohe Varianzen nicht mehr berücksichtigt werden können. Die Eigenvektorkoeffizienten auf Basis der Korrelationsmatrix unterscheiden sich von denjenigen auf Basis der VKM und können nicht ohne Weiteres ineinander umgerechnet werden, weil der Zusammenhang zwischen VKM und KM nicht-linear ist.

Positive paarweise Zusammenhänge

Die Risikofaktoren müssen untereinander positiv korreliert sein. Denn nur dann können für den Portfoliozusammenhang sinnvolle Anteile durch die Lösung eines Eigenwertproblems identifiziert werden. Dementsprechend müssen die Nebendiagonalelemente der Varianz-Kovarianz-Matrix alle größer als 0 sein.

Dieser Fall ist typisch für Portfolios, die ausschließlich aus Risikofaktoren bestehen und nicht aus Derivaten, da viele Risikofaktoren typischerweise einem übergeordneten Markttrend folgen. Derivate sind Funktionen, die auf Risikofaktoren definiert sind, so dass die Wertentwicklung eines Derivates von einem übergeordneten Markttrend gelöst werden kann.

Voraussetzung für die Diversifikation - Folie 1/3

Damit nicht ein Risikofaktor überproportional in das EigenRisiko-Portfolio einfließt, ist es notwendig, dass die Varianzen der einzelnen Risikofaktoren eine ähnliche Größenordnung besitzen.

Voraussetzung für die Diversifikation - Folie 2/3

Häufig werden Volatilitäten auf Basis der 1-Tages-Renditen berechnet. Wenn die Renditen mit der relativen Preisänderung geschätzt werden, handelt es sich um diskrete Renditen und es wird deutlich, dass die Renditen dimensionslos sind und damit unabhängig von der Größenordnung des Risikofaktorpreises.

$$r_t = \frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}}.$$

Somit sind Unterschiede in den Volatilitäten einer Aktie mit einem Stückpreis von 1.000 € und einer Aktie mit einem Stückpreis von 4 € nicht auf den höheren Preis zurückzuführen, sondern nur auf ein höheres Schwankungsverhalten. Durch die Normierung ist es möglich, dass sowohl die Aktie mit dem höheren Stückpreis, als auch diejenige mit dem niedrigeren Stückpreis eine höhere Volatilität besitzt als die andere.

Voraussetzung für die Diversifikation - Folie 3/3

Dadurch, dass Renditen unabhängig von der Größenordnung der Risikofaktorpreise sind, kann im Normalbelastungsfall ausgeschlossen werden, dass die Größenordnung der Volatilität einer Aktie ein Vielfaches der Volatilität einer anderen Aktie ist, wodurch ähnliche Größenordnungen der Volatilitäten entstehen.

Beurteilung

1. Im Vergleich zur klassischen Portfoliotheorie müssen im EigenRisiko-Modell keine Renditen angenommen werden, um die Anteile zu schätzen. Notwendig ist nur die Varianz-Kovarianz-Matrix und die Annahme, dass ein positiver Zusammenhang zwischen Rendite und Risiko/Varianz besteht.
2. Die Anteile können (einfach) durch Berechnung des standardisierten ersten Eigenvektors berechnet werden.
3. Die Risikokennzahl ϕ bildet den Kern des Investitionsstrebens ab, nämlich die Abhängigkeit des Portfolios von Einzelpositionen im Portfolio.
4. Die Investition in das EigenRisiko-Portfolio ist rational, denn es ist diversifiziert mit (bedingt) maximaler Rendite.
5. Die Anwendungsvoraussetzungen sind wenig restriktiv und für das angewandte Risiko- und Portfoliomanagement realistisch.

Ausführliche Herleitung

Die Risikoproportion und das EigenRisiko-Portfolio werden ausführlich hergeleitet und ihre Anwendungsmöglichkeiten detailliert mit Beispielen veranschaulicht.

Diversifiziertheit des EigenRisiko-Portfolios

Der Grund dafür, warum die Anteile, die durch die Lösung des Eigenwertproblem ermittelt werden, zu einer *diversifizierten* Linearkombination führen.

Ursache der geringen Risikoproportion des EigenRisiko-Portfolios

Durch Betrachtung einer Spektralzerlegung der Varianz-Kovarianz-Matrix wird ersichtlich, warum das EigenRisiko-Portfolio eine so geringe Risikoproportion aufweist.

Beurteilung

Eine ausführliche Analyse der Risikoproportion und des EigenRisiko-Portfolios in Bezug auf ihren Informationsgehalt

Herleitung der Anwendungsvoraussetzungen

Die Anwendungsvoraussetzungen werden detailliert auf 50 Seiten über verschiedenen Simulationen abgeleitet und ihre Gründe beleuchtet.

Möglichkeiten der Forschung

Forschungsmöglichkeiten im Zusammenhang mit Risikoproportion und EigenRisiko-Portfolio über das EigenRisiko-Modells hinaus

Normalbelastungsfall und Stress-Fall

Warum die Risikoproportion dazu geeignet ist, Informationen über das Risiko in Stress-Situationen zu erfassen, obwohl sie auf Basis von Informationen des Normalbelastungsfalls bestimmt wird.

Konzentrationsmessung

Der Zusammenhang zwischen der Risikoproportion und der Aufgabe der Konzentrationsmessung von Portfolios. Die Risikoproportion kann ein Bindeglied sein zwischen einfachen Konzentrationsindikatoren und aufwendigen modellbasierten Ansätzen zur Bestimmung von Risikokonzentrationen.

Potential des Diversifikationseffektes

Die Ursache dafür, warum das Potential des Diversifikationseffektes durch die konkrete Korrelationsmatrix eines Risikofaktorsets bestimmt ist. Daraus wird ersichtlich, dass es bei der Bestimmung der Portfolioanteile darum geht, das Potential des Diversifikationseffektes möglichst gut auszuschöpfen.

Kontakt

Mit freundlichen Grüßen

Dr. Martin Poos
eigenrisiko@gmail.com
Lehrstuhl für Statistics and Econometrics
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Universitätsstraße 1
D-40225 Düsseldorf