

Einführung
in die
Angewandte Mathematik

Uwe Kraeft

2012

Berichte aus der Mathematik

Uwe Kraeft

Einführung in die Angewandte Mathematik

Shaker Verlag
Aachen 2012

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Copyright Shaker Verlag 2012

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-1507-2

ISSN 0945-0882

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen

Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9

Internet: www.shaker.de • E-Mail: info@shaker.de

Vorwort

Als Ergänzung zum „Lehrgang der Mathematik“ des Autors folgen in diesem Band Anwendungen, die auch besonders in den Naturwissenschaften von Bedeutung sind. Verwendet wurden neben den von mir besuchten Vorlesungen an den Universitäten Hamburg, Tübingen und Zürich vor allem die Inhalte von [KrI-VII]. Zahlreiche Anregungen stammen aus der Literatur (siehe Literaturauswahl Seite 91 - ohne Programmierung und Technik). Einiges ist neu.

Die Themen der Angewandten Mathematik sind zu diskutieren. Wenn es um die praktische Anwendung ginge, müssten das Rechnen, die Geometrie [KrI], zum Beispiel mit den Gebieten Geodäsie [KrVI S. 190], Kristallographie [KrVI S. 133] oder Differenzialgeometrie, die hier nicht behandelt wurden, mit an vorderster Stelle genannt werden. Rein inhaltlich könnte die Angewandte Mathematik stark vereinfacht so definiert werden, dass diese Disziplin vor allem, aber nicht nur wegen der möglichen Anwendungen und weniger wegen der mathematischen Erkenntnisse betrieben wird. Doch wo soll die Grenze zwischen der Suche nach rein mathematischen Inhalten und anderen gezogen werden, die mit den gleichen Methoden und ebenso streng untersucht und bewiesen werden müssen. So ist die Definition etwas willkürlich und von Autor zu Autor verschieden.

Die Methoden der Angewandten Mathematik haben vielfach die Eigenschaft von „Rezepten“. Diese sind für schnelle Berechnungen sicher vorteilhaft und sogar notwendig, insbesondere für Rechenprogramme. Dennoch sollte man sich immer der mathematischen Grundlagen bewusst sein, schon um Fehler bei Aussagen zu vermeiden. Dies gilt insbesondere für Beweise mit Methoden, die allenfalls Näherungen sind.

In 12 Kapiteln werden in dem vorliegenden Text nach einer Einführung Vektoren, Matrizen, Tensoren, Determinanten und lineare Gleichungssysteme LGS, Anwendungen der Infinitesimalrechnung, Differenzialgleichungen, Grundlagen der Statistik, die Fehlerfortpflanzung, Numerische Mathematik sowie Kryptographie mit einem

Beispiel im Anhang: „Geometrie der Atome“ im Hinblick auf die Anwendung in der Mathematik und in den Naturwissenschaften in kurzer und elementarer Form dargestellt. Für die mathematischen Grundlagen der Analysis wird auf [KrII] und für die der allgemeinen Algebra sowie Analytischen Geometrie auf [KrIII] (jeweils 1. Kapitel) verwiesen. Andere, mehr fachbezogene Anwendungen, wie beispielsweise in den Wirtschaftswissenschaften [KrV], der Informatik, Systemanalyse, Programmierung oder in der Technik, werden nicht behandelt.

Der Text stellt die Meinung des Autors nach dessen Kenntnissen dar. Der Inhalt wurde sorgfältig auf Fehler geprüft, die aber nicht gänzlich ausgeschlossen werden können. Eine Gewährleistung oder Garantie für die Richtigkeit des Textes kann nicht übernommen werden. Ich bin für entsprechende Hinweise oder Verbesserungsvorschläge dankbar.

Leimen, im Oktober 2012

Uwe Kraeft

<http://www.kannitverstan.net/>

<http://mathematik-web.de/>

Auswahl von Symbolen

$\Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow$	daraus folgt (in den angegebenen Richtungen)
$\in$	ist Element von (ist enthalten in)
$A=\{a,b,c\}$	Beispiel einer Menge A mit Elementen a, b und c
$A \subset B$	A ist Teilmenge von B, $A=B$ ist nicht ausgeschlossen
$\bullet, \mathbf{x}$	Skalarprodukt, Vektorprodukt
$=$	(genau) gleich (nur in der Mathematik)
$\approx$	angenähert gleich (Grenzwert)
$\approx, \sim$	ungefähr gleich, von ähnlicher Größenordnung
$\equiv$	$a \equiv b \pmod{c} \Leftrightarrow a \equiv b_c \Leftrightarrow (a-b)/c \in \mathbb{Z}$ für $a,b \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{N}$
$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen 1, 2, 3, ...
$\mathbb{N}^0$	natürliche Zahlen einschließlich der Null 0, 1, 2, 3, ...
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...
$\mathbb{P}$	Primzahl: 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...
$\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^+$	rationale Zahlen, positive rationale Zahlen
$\mathbb{R}, \mathbb{C}$	reelle Zahlen, komplexe Zahlen
$i, j, m, n, \dots$	meistens natürliche oder ganze Zahlen (oder $i^2 = -1$)
$(p, q) = d$	größter gemeinsamer Teiler (ggT) von p und q ist $d \in \mathbb{N}$
$z, z^*, \bar{z}$	komplexe, konjugiert komplexe Zahlen: $z = a + bi, z^* = \bar{z} = a - bi$
$\vec{v}$	Vektor
M	Matrix
$M^T, \vec{v}^T$	transponierte(r) Matrix, Vektor
M^{-1}	inverse Matrix
$\det M = M $	Determinante
M_{ij}	Adjunkte
$\sum, \prod$	Summe; Produkt
$\frac{df(x)}{dx}; \dot{x}(t)$	Ableitung von f(x) nach x; Ableitung von x nach t
$\frac{\partial f(x, y, \dots)}{\partial x}$	partielle Ableitung von f(x, y, ...) nach x
$\int f(x) dx$	Integral
ggT	größter gemeinsamer Teiler
kgV	kleinstes gemeinsames Vielfaches
∞	beliebig viele/ groß
Andere spezielle Symbole werden im Text erklärt.	

Inhalt

	Seite
1. Einführung - - - - -	- 1
2. Vektoren - - - - -	- 3
3. Matrizen - - - - -	- 11
4. Tensoren - - - - -	- 17
5. Determinanten und LGS - - - - -	- 19
6. Anwendungen der Infinitesimalrechnung - - - - -	- 25
7. Differenzialgleichungen - - - - -	- 27
8. Polynome - - - - -	- 39
9. Statistik - - - - -	- 43
10. Fehlerfortpflanzung - - - - -	- 53
11. Numerische Mathematik - - - - -	- 55
12. Kryptographie - - - - -	- 67
Anhang: Geometrie der Atome - - - - -	- 73
Literaturauswahl - - - - -	- 91
Veröffentlichungen des Autors - - - - -	- 93
Lehrgang der Mathematik - - - - -	- 93
Gesammelte Korrekturen - - - - -	- 95
Studies in Number Theory - - - - -	- 99