

RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik



**Beiträge zu robusten überabtastenden komplexen
und hyperkomplexen Filterbanksystemen**

DISSERTATION

zur
Erlangung des Grades eines
Doktor-Ingenieurs

vorgelegt von
DANIEL ALFSMANN

Bochum, 2012

Dissertation eingereicht:
Referent:
Korreferent:
Tag der mündlichen Prüfung:

15. November 2011
Prof. Dr.-Ing. H. G. Göckler
Prof. Dr.-Ing. R. Martin
26. Januar 2012

Schriftenreihe Digitale Signalverarbeitung

Band 8

Daniel Alfsmann

**Beiträge zu robusten überabtastenden komplexen
und hyperkomplexen Filterbanksystemen**

Shaker Verlag
Aachen 2012

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Zugl.: Bochum, Univ., Diss., 2012

Copyright Shaker Verlag 2012

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-1221-7

ISSN 1617-2221

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen

Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9

Internet: www.shaker.de • E-Mail: info@shaker.de

Vorwort

Die vorliegende Dissertation ist im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter in der Arbeitsgruppe Digitale Signalverarbeitung der Ruhr-Universität Bochum entstanden.

Für die außerordentlich engagierte Betreuung der Arbeit danke ich Herrn Professor Heinz G. Göckler. Seine kontinuierliche Unterstützung mit vielen wertvollen Hinweisen nebst ständiger Bereitschaft zu fachlichen Diskussionen und außerfachlichen Gesprächen haben maßgeblich zum Gelingen des Vorhabens beigetragen.

Herrn Professor Rainer Martin gilt mein Dank für die Übernahme des Korreferats und das dieser Arbeit entgegengebrachte Interesse.

Für viele fruchtbare Diskussionen möchte ich mich auch sehr herzlich bei Herrn Dr. Alfons Skirde von der mathematischen Fakultät der Ruhr-Universität Bochum und Herrn Dr. Steve Sangwine von der University of Essex bedanken.

Weiterhin bedanke ich mich bei meinen Kollegen Mohammed N. Abdulazim und Thomas Kurbiel für den konstruktiven Austausch und das gute Arbeitsklima in der Arbeitsgruppe Digitale Signalverarbeitung.

Ganz besonders bedanke ich mich bei meiner Familie für Ihre ständige Rücksichtnahme und liebevolle Unterstützung während der gesamten Zeit der Anfertigung dieser Arbeit.

Bochum, Juni 2012

DANIEL ALFSMANN

Inhaltsverzeichnis

Notation	v
1 Einleitung	1
2 Robuste Filterbanksysteme bei Manipulation der Teilbandsignale	7
2.1 Konzepte für Filterbanksysteme	8
2.1.1 Analyse-Addierer-Filterbanksystem ohne Dezimation	8
2.1.2 Filterbank-Equaliser	9
2.1.3 Dezimierendes Analyse-Synthese-Filterbanksystem	10
2.2 Filterbänke für dezimierende Analyse-Synthese-Filterbanksysteme	13
2.2.1 Reell modulierte Filterbänke	13
2.2.2 Komplex modulierte Filterbänke	15
2.2.3 Allpass-transformierte modulierte Filterbänke	17
2.2.4 Baumstrukturen aus Einzelfilterbänken	19
2.3 Zusammenfassung	20
3 Teilbandsignalverarbeitung in digitalen Hörgeräten	22
3.1 Gehör und Gehörschädigung	22
3.2 Teilbandsignalverarbeitung in Hörgeräten	24
3.2.1 Frequenz- und pegelabhängige Verstärkung	25
3.2.2 Einkanalige Geräuschreduktion	26
3.2.3 Mehrkanalige Geräuschreduktion und Richtungshören	27
3.3 Zusammenfassung und Modellbildung	30
I Überabtastende komplex modulierte Filterbanksysteme	33
4 Analyse im Frequenzbereich	35
4.1 Definition des Filterbanksystems	35
4.1.1 Allgemeine Systembeschreibung	36
4.1.2 Modellierung des Eingangssignals	37
4.1.3 Elementares Frequenzschema der Prototypfilter	38
4.2 Qualitative Analyse der störungsbehafteten Übertragung	39
4.2.1 Nutz- und Aliasing-Anteile der Teilbandsignale	40
4.2.2 Nutz- und Aliasing-Anteile des Ausgangssignals	41
4.2.3 Imaging-Anteile des Ausgangssignals	42

4.3	Quantitative Analyse anhand eines Modulationsmodells	44
4.3.1	Zusammensetzung des Nutzanteils des Ausgangssignals	46
4.3.2	Zusammensetzung des Störanteils des Ausgangssignals	49
4.3.3	Gewichtete Prototypfilter	51
4.4	Bestimmung charakteristischer Eigenschaften	53
4.4.1	Nutz- und Störanteile des Ausgangssignals	53
4.4.2	Robuste Nutz- und Störanteile des Ausgangssignals	56
4.4.3	Signal-Stör-Verhältnisse am Ausgang	57
4.4.4	Lineare Signalverzerrung und Gesamtverstärkung	62
4.4.5	Nutz- und Störanteile der Teilbandsignale	64
4.5	Zusammenfassung	65
5	Synthese-Verfahren mit Nebenbedingungen im Frequenzbereich	68
5.1	Ansatz des Verfahrens	68
5.1.1	Nebenbedingungen im Frequenzbereich	68
5.1.2	Geeignete Filterentwurfsverfahren	69
5.2	Sperrtoleranzen bei unverstärkten Teilbandsignalen	74
5.2.1	Ausgleich unterschiedlicher Leistungsbeiträge durch Lobes	74
5.2.2	Abschätzung der Basis-Sperrtoleranz	76
5.2.3	Berücksichtigung einer frequenzabhängigen Aufwandsfunktion	82
5.2.4	Approximation der Referenz-Durchlassbereiche	86
5.3	Sperrtoleranzen bei verstärkten Teilbandsignalen	89
5.3.1	Grundlegende Problemstellung	89
5.3.2	Sperrtoleranzen des Analyse-Prototypfilters	92
5.3.3	Sperrtoleranzen des Synthese-Prototypfilters	96
5.4	Zusammenfassung und Diskussion	110
6	Vergleich mit bekannten Entwurfsverfahren	112
6.1	Untersuchung bekannter Entwurfsverfahren	112
6.1.1	HWS-Entwurfsverfahren von HARTENECK et al.	114
6.1.2	HGCN-Entwurfsverfahren von DE HAAN et al.	115
6.1.3	DNCH-Entwurfsverfahren von DAM et al.	117
6.1.4	SKAG-Entwurfsverfahren von STÖCKER et al.	118
6.1.5	BS-Entwurfsverfahren von BÄUML und SÖRGEL	119
6.1.6	YGNT-Entwurfsverfahren von YIU et al.	120
6.1.7	WDR-Entwurfsverfahren von WILBUR et al.	121
6.1.8	DBS-Entwurfsverfahren von DUMITRESCU et al.	122
6.1.9	IR-Entwurfsverfahren von KURBIEL	123

6.2	Vergleich der Entwurfsverfahren	125
6.2.1	Qualitativer Vergleich und erste Ergebnisse	125
6.2.2	Numerischer Vergleich bei unverstärkten Teilbandsignalen	127
6.2.3	Numerischer Vergleich bei verstärkten Teilbandsignalen	134
6.3	Zusammenfassung und Diskussion	141

II Hyperkomplexe Signalverarbeitung und Filterbänke 145

7	Hyperkomplexe Algebren und digitale Signalverarbeitung	147
7.1	Zweidimensionale Algebren	147
7.1.1	Ausgewählte Operationen und Eigenschaften komplexer Zahlen	147
7.1.2	Hyperbolische Zahlen	149
7.2	Systeme mit zweidimensionalen Algebren	152
7.2.1	Systembeschreibung und z-Transformation	152
7.2.2	Orthogonale Darstellung und Nullteiler	154
7.3	Höherdimensionale hyperkomplexe Algebren	156
7.3.1	Hyperkomplexe Algebren	157
7.3.2	Generation und Klassifikation hyperkomplexer Algebren	158
7.3.3	Kommutative und assoziative hyperkomplexe Algebren	162
7.3.4	Multikomplexe Zahlen	167
7.3.5	Multihyperbolische Zahlen	169
7.4	Systeme mit höherdimensionalen kommutativen Algebren	170
7.5	Zusammenfassung	175
8	Hyperkomplexe Filterbänke	176
8.1	Ansätze für hyperkomplexe Filterbänke	176
8.1.1	Modulierte Filterbänke	176
8.1.2	Filterbänke mit Allpasstrukturen	178
8.1.2.1	Klassische Ansätze und deren Eigenschaften	178
8.1.2.2	Erweiterung auf hyperkomplexe Allpässe	181
8.2	Filterbänke mit multihyperbolischen Allpasstrukturen	182
8.2.1	Multihyperbolische Allpässe	183
8.2.2	Wunschfrequenzgänge mit undefinierten Übergangsbereichen	185
8.2.3	Wunschfrequenzgänge mit definierten Übergangsbereichen	191
8.3	Zusammenfassung und Diskussion	201
9	Zusammenfassung und Ausblick	204

A	Ergänzungen zu Teil I	209
A.1	Effiziente Polyphasen-Strukturen	209
A.2	Matrixdarstellung der Modulationskomponenten	210
A.3	Drehfaktoren nach KURBIEL	213
A.4	Filterkoeffizienten ausgewählter Prototypfilter	213
A.5	NBF-Verfahren bei unverstärkten Teilbandsignalen	214
A.6	Verwendete Parameter der Entwurfsverfahren	217
B	Ergänzungen zu Teil II	219
B.1	Trikomplexe und quadrikomplexe Zahlen	219
B.2	Trihyperbolische und quadrihyperbolische Zahlen	223
B.3	Tessarinen	224
B.4	Berechnung der charakteristischen Matrix einer Algebra	225
B.5	Ergänzungen zur bihyperbolischen Filterbank	227
	Literaturverzeichnis	229

Notation

Abkürzungen

AA-FBS	<u>A</u> nalyse- <u>A</u> ddierer- <u>F</u> ilter <u>b</u> ank <u>s</u> ystem (ohne Dezimation)
AFB	<u>A</u> nalyse- <u>F</u> ilter <u>b</u> ank
AS-FBS	<u>A</u> nalyse- <u>S</u> ynthese- <u>F</u> ilter <u>b</u> ank <u>s</u> ystem (mit Dezimation)
ASK	<u>A</u> usgangs- <u>S</u> törungs- <u>K</u> riterium
AVK	<u>A</u> usgangs- <u>V</u> erzerrungs- <u>K</u> riterium
BS	(Verfahren nach) <u>B</u> ÄUML und <u>S</u> ÖRDEL [24]
DBS	(Verfahren nach) <u>D</u> UMITRESCU, <u>B</u> REGOVIĆ und <u>S</u> ARAMÁKI [67]
DFT	<u>d</u> iskrete <u>F</u> ourier- <u>T</u> ransformation
DNCH	(Verfahren nach) <u>D</u> AM, <u>N</u> ORDHOLM, <u>C</u> ANTONI und DE <u>H</u> AAN [56]
DS	NELDER-MEAD <u>D</u> ownhill- <u>S</u> implex-Verfahren [180]
DSV	<u>D</u> igitale <u>S</u> ignal <u>v</u> erarbeitung
DTFT	zeitdiskrete Fourier-Transformation (<u>d</u> iscrete- <u>t</u> ime <u>F</u> ourier <u>t</u> ransform)
FBE	<u>F</u> ilter <u>b</u> ank- <u>E</u> qualiser
FBS	<u>F</u> ilter <u>b</u> ank <u>s</u> ystem
FFT	schnelle Fourier-Transformation (<u>f</u> ast <u>F</u> ourier <u>t</u> ransform)
FHT	schnelle WALSH-HADAMARD-Transformation (<u>f</u> ast <u>H</u> adamard <u>t</u> ransform)
GDFT	verallgemeinerte <u>d</u> iskrete Fourier-Transformation (<u>g</u> eneralised <u>d</u> iscrete <u>F</u> ourier <u>t</u> ransform)
GRA-AFB	<u>A</u> nalyse- <u>F</u> ilter <u>b</u> ank mit <u>g</u> ekoppelten <u>r</u> eellen <u>A</u> llpässen
HGCN	(Verfahren nach) DE <u>H</u> AAN, <u>G</u> RBIĆ, <u>C</u> LAESSON und <u>N</u> ORDHOLM [101, 102]
HWS	(Verfahren nach) <u>H</u> ARTENECK, <u>W</u> EISS und <u>S</u> TEWART [111]
IR	(Verfahren mit) „iterativ neugewichtetem Entwurf“ (<u>i</u> teratively <u>r</u> eweighted design) nach KURBIEL [144, 146]
KA-AFB	<u>A</u> nalyse- <u>F</u> ilter <u>b</u> ank mit <u>k</u> omplexem <u>A</u> llpass
KFE	<u>K</u> URBIEL- <u>F</u> ilter <u>e</u> ntwurf [144, 147]
LDS	<u>L</u> eistungsdichtespektrum (spektrale Leistungsdichte)
LPTV	linear, periodisch und zeitveränderlich (<u>l</u> inear <u>p</u> eriodically <u>t</u> ime- <u>v</u> arying)
LMS	<u>l</u> east <u>m</u> ean <u>s</u> quares (Algorithmus) [34, 113, 192]
LTi	linear und zeitinvariant (<u>l</u> inear <u>t</u> ime- <u>i</u> nvariant)
MIMO	(System mit) mehreren Eingängen und mehreren Ausgängen (<u>m</u> ultiple <u>i</u> nput, <u>m</u> ultiple <u>o</u> utput)

MVDR	<u>minimum variance distortionless response</u> [52]
NBF	(Verfahren mit) <u>Nebenbedingungen</u> im <u>Frequenzbereich</u>
NPR	Nahezu perfekte Rekonstruktion (<u>near-perfect reconstruction</u>)
PCLS	<u>peak-constrained least squares</u> [5, 6]
PMFE	<u>PARKS-McCLELLAN-Filterentwurf</u> [128, 169, 185, 192, 205, 225]
PR	Perfekte Rekonstruktion (<u>perfect reconstruction</u>)
QCQP	<u>quadratically constrained quadratic programming</u> [37, 88]
QP	<u>quadratic programming</u> [37, 95]
SA	<u>simulated annealing</u> [137]
SAR	Signal-Aliasing-Verhältnis (<u>signal-to-aliasing ratio</u>)
SDP	<u>semidefinite programming</u> [37, 257]
SDR	Signal-Stör-Verhältnis (<u>signal-to-distortion ratio</u>)
SFB	<u>Synthese-Filterbank</u>
SIR	Signal-Imaging-Verhältnis (<u>signal-to-imaging ratio</u>)
SISO	(System mit) einem Eingang und einem Ausgang (<u>single input, single output</u>)
SKAG	(Verfahren nach) <u>STÖCKER</u> , <u>KURBIEL</u> , <u>ALFSMANN</u> und <u>GÖCKLER</u> [240]
SNR	Signal-Geräusch-Verhältnis (<u>signal-to-noise ratio</u>)
SOCP	<u>second-order cone programming</u> [37, 156]
SPL	Schalldruckpegel (<u>sound pressure level</u>) [65, 84]
TB	<u>Teilband</u>
TBV	<u>Teilbandsignalverarbeitung</u>
TSK	<u>Teilband-Störungs-Kriterium</u>
WDR	(Verfahren nach) <u>WILBUR</u> , <u>DAVIDSON</u> und <u>REILLY</u> [271]
WHT	<u>WALSH-HADAMARD-Transformation</u>
YGNT	(Verfahren nach) <u>YIU</u> , <u>GRBIĆ</u> , <u>NORDHOLM</u> und <u>TEO</u> [278, 279]
zT	z-Transformation

Formelzeichen

$\tilde{b}_{w,\mu}(\Omega)$	Wunschphasengang des μ -ten orthogonalen Systems, $\mu = 0, \dots, s-1$
$C(\Omega)$	Aufwandfunktion eines Prototypfilters
\mathbb{C}	Algebra der komplexen Zahlen
\mathbb{C}_D	Algebra der 2^D -dimensionalen multikomplexen Zahlen, $D \in \mathbb{N}$
$\mathbb{C}\mathbb{D}_D$	Algebra der 2^{D+1} -dimensionalen Tessarinen, $D \in \mathbb{N}$

\mathbb{D}	Algebra der hyperbolischen Zahlen
\mathbb{D}_D	Algebra der 2^D -dimensionalen multihyperbolischen Zahlen, $D \in \mathbb{N}$
d	Dimension einer hyperkomplexen Algebra
D	Potenz der Dimension $d = 2^D$ einer hyperkomplexen Algebra
\mathcal{D}	Durchlassbereich (inkl. Übergangsbereich, Kap. 4–6)
\mathcal{D}_ν	Durchlassbereich des ν -ten Teilbandfilters (exkl. Übergangsbereich, Kap. 8)
\mathbf{e}_μ	Basisvektor (zur Orthogonalisierung), $\mu = 0, \dots, s - 1$
\mathbf{E}	Basismatrix (Regularisierungsmatrix)
\mathbf{F}	Orthogonalisierungsmatrix
$F_k(z_i)$	Übertragungsfunktion der k -ten Modulationskomponente im FBS, $k = 0, \dots, M - 1$
$F_{A,k}(e^{j\Omega})$	Aliasing-Anteil der Übertragungsfunktion der k -ten Modulationskomponente im FBS, $k = 0, \dots, M - 1$
$F_{I,k}(e^{j\Omega})$	Imaging-Anteil der Übertragungsfunktion der k -ten Modulationskomponente im FBS, $k = 0, \dots, M - 1$
$F_0(z_i)$	Verzerrungsfunktion des FBS
g_l	TBV-Verstärkungsfaktor, $g_l \in \mathbb{R}$, $l = 0, \dots, I - 1$
$G_{\mathcal{D}}$	Durchlassbereiche der SFB-Teilbandfilter
$G_l(z_i)$	Übertragungsfunktion eines SFB-Teilbandfilters, $l = 0, \dots, I - 1$
g_0	Impulsantwort des SFB-Prototypfilters $G_0(z_i)$
$G_0(z_i)$	Übertragungsfunktion des SFB-Prototypfilters
$G'_0(e^{j\Omega})$	Frequenzgang des SFB-Prototypfilters, gewichtet mit $H_{\mathcal{D}}$
$G_{\mathcal{S}}$	Sperrbereiche der SFB-Teilbandfilter
$H_{\mathcal{D}}$	Durchlassbereiche der AFB-Teilbandfilter
$H_l(z_i)$	Übertragungsfunktion eines AFB-Teilbandfilters, $l = 0, \dots, I - 1$
$H_{\mathcal{S}}$	Sperrbereiche der AFB-Teilbandfilter
h_0	Impulsantwort des AFB-Prototypfilters $H_0(z_i)$
$H_0(z_i)$	Übertragungsfunktion des AFB-Prototypfilters
$H'_0(e^{j\Omega})$	Frequenzgang des SFB-Prototypfilters, gewichtet mit $G_{\mathcal{D}}$
\mathbb{H}	Algebra der Quaternionen
I	Anzahl der Teilbandsignale im FBS
i_ν	imaginäre Einheit der ν -ten hyperkomplexen Komponente, $\nu = 0, \dots, d - 1$

\mathcal{I}_ν	Menge der Indizes der orthogonalen Allpässe $\tilde{H}_\mu(z)$, $\mu = 1, \dots, d-1$, für die im Durchlassbereich $\mathcal{D}_{\nu+1}$ eine Änderung $\Delta^2 \tilde{b}_{w,\mu}(\mathcal{D}_\nu)$ der Wunschphasendifferenzen $\Delta \tilde{b}_{w,\mu}(\Omega)$ gegenüber dem Durchlassbereich \mathcal{D}_ν erfolgen muss
\mathcal{J}_ν	Menge der Indizes der orthogonalen Allpässe $\tilde{H}_\mu(z)$, $\mu = 1, \dots, d-1$, für die im Durchlassbereich $\mathcal{D}_{\nu+1}$ keine Änderung $\Delta^2 \tilde{b}_{w,\mu}(\mathcal{D}_\nu)$ der Wunschphasendifferenzen $\Delta \tilde{b}_{w,\mu}(\Omega)$ gegenüber dem Durchlassbereich \mathcal{D}_ν erfolgen darf
m	diskreter Zeitparameter, bezogen auf reduzierte Abtastrate f_d der Teilbandsignale des FBS
m_l	diskreter Zeitparameter, bezogen auf individuelle Abtastrate $\frac{f}{M}$ des Teilbandsignals $x_l(m_l)$, $l = 0, \dots, I-1$
M	(gemeinsamer) Dezimationsfaktor
M_l	Dezimationsfaktor des Teilbandsignals $x_l(m_l)$, $l = 0, \dots, I-1$
n	diskreter Zeitparameter, bezogen auf Abtastrate f_i des Eingangs- bzw. Ausgangssignals des FBS
N_h	Länge der Impulsantwort $h(n)$ AFB-Prototypfilters
N_g	Länge der Impulsantwort $g(n)$ SFB-Prototypfilters
N_{ges}	Gesamtlänge der Impulsantworten beider Prototypfilter
\mathbb{N}	Algebra der natürlichen Zahlen
\mathbb{O}	Algebra der Oktonionen
\mathbb{Q}	Algebra der rationalen Zahlen
R	Überabtastfaktor
$R_{xx}(e^{j\Omega})$	LDS des Eingangssignals $x(n)$
$R_{yy}(e^{j\Omega})$	LDS des Ausgangssignals $y(n)$
$R_{y_{\text{A}y_{\text{A}}}}(e^{j\Omega})$	LDS des Aliasing-Anteils des Ausgangssignals $y(n)$
$R_{y_{\text{D}y_{\text{D}}}}(e^{j\Omega})$	LDS des Störanteils des Ausgangssignals $y(n)$
$R_{y_{\text{I}y_{\text{I}}}}(e^{j\Omega})$	LDS des Imaging-Anteils des Ausgangssignals $y(n)$
$R_{y_{\text{U}y_{\text{U}}}}(e^{j\Omega})$	LDS des Nutzanteils des Ausgangssignals $y(n)$
$R_{y_{\bullet}y_{\bullet}}^{(0)}(e^{j\Omega})$	LDS des Nutz- ($\bullet = \text{U}$), Aliasing- ($\bullet = \text{A}$), Imaging- ($\bullet = \text{I}$) oder Störanteils ($\bullet = \text{D}$) des Ausgangssignals $y(n)$ für TBV-Phasenwinkel $\varrho_l \equiv 0$
$R_{y_{\bullet}y_{\bullet}}^c(e^{j\Omega})$	robustes LDS des Nutz- ($\bullet = \text{U}$), Aliasing- ($\bullet = \text{A}$), Imaging- ($\bullet = \text{I}$) oder Störanteils ($\bullet = \text{D}$) des Ausgangssignals $y(n)$
\mathbb{R}	Algebra der reellen Zahlen
s	Anzahl der orthogonalen Komponenten
s_{max}	maximal mögliche Anzahl der Komponenten bei orthogonaler Zerlegung einer Algebra

SAR	frequenzunabhängiges Signal-Aliasing-Verhältnis des Ausgangssignals $y(n)$ für TBV-Verstärkungsfaktoren $g_l \equiv 1$
SAR _{TB}	frequenzunabhängiges Signal-Aliasing-Verhältnis (Signal-Stör-Verhältnis) in den Teilbandsignalen
SDR	frequenzunabhängiges Signal-Stör-Verhältnis des Ausgangssignals $y(n)$ für TBV-Verstärkungsfaktoren $g_l \equiv 1$
SDR _w [◦]	Wunschwert für das minimale (robuste) SDR [◦] (Ω) des FBS
SIR	frequenzunabhängiges Signal-Imaging-Verhältnis des Ausgangssignals $y(n)$ für TBV-Verstärkungsfaktoren $g_l \equiv 1$
SIR _w [◦]	Wunschwert für das minimale (robuste) SIR [◦] (Ω) des FBS
S • R(Ω)	frequenzabhängiges Signal-Aliasing-Verhältnis ($\bullet = A$), Signal-Imaging-Verhältnis ($\bullet = I$) oder Signal-Stör-Verhältnis ($\bullet = D$) des Ausgangssignals $y(n)$
S • DR(Ω)	Verhältnis der LDS des Nutz- und Aliasing- ($\bullet = A$), Imaging- ($\bullet = I$) oder Störanteils ($\bullet = D$) im Ausgangssignal $y(n)$
S • R ⁽⁰⁾ (Ω)	frequenzabhängiges Signal-Aliasing-Verhältnis ($\bullet = A$), Signal-Imaging-Verhältnis ($\bullet = I$) oder Signal-Stör-Verhältnis ($\bullet = D$) des Ausgangssignals $y(n)$ für TBV-Phasenwinkel $\varrho_l \equiv 0$
S • R [◦] (Ω)	frequenzabhängiges robustes Signal-Aliasing-Verhältnis ($\bullet = A$), Signal-Imaging-Verhältnis ($\bullet = I$) oder Signal-Stör-Verhältnis ($\bullet = D$) des Ausgangssignals $y(n)$
u	Dimension der Untereralgebra
\mathcal{U}_ν	Übergangsbereich des ν -ten Teilbandfilters
W_N	komplexer DFT-Drehfaktor $e^{-j\frac{2\pi}{N}}$
$x(n)$	Eingangssignal des FBS, reell- oder komplexwertig
$X(e^{j\Omega})$	DTFT-Spektrum des Eingangssignals des FBS
$x_l(m)$	dezimiertes Teilbandsignal, $l = 0, \dots, I - 1$, als Ausgangssignal der AFB (Kap. 2–6)
$X_l(e^{j\omega})$	DTFT-Spektrum eines dezimierten Teilbandsignals
$X_{A,l}(e^{j\omega})$	DTFT-Spektrum des Aliasing-Anteils eines dezimierten Teilbandsignals
$X_{U,l}(e^{j\omega})$	DTFT-Spektrum des Nutzanteils eines dezimierten Teilbandsignals
$y(n)$	Ausgangssignal des FBS
$Y(e^{j\Omega})$	DTFT-Spektrum des Ausgangssignals des FBS
$Y_A(e^{j\Omega})$	DTFT-Spektrum des Aliasing-Anteils des Ausgangssignals des FBS
$Y_D(e^{j\Omega})$	DTFT-Spektrum des Störanteils des Ausgangssignals des FBS
$Y_I(e^{j\Omega})$	DTFT-Spektrum des Imaging-Anteils des Ausgangssignals des FBS
$Y_U(e^{j\Omega})$	DTFT-Spektrum des Nutzanteils des Ausgangssignals des FBS

$y_l(m)$	dezimiertes und verarbeitetes Teilbandsignal, $l = 0, \dots, I-1$, als Eingangssignal der SFB (Kap. 2-6); Teilbandsignal als Ausgangssignal der AFB (Kap. 7, 8)
$Y_l(e^{j\omega})$	DTFT-Spektrum eines dezimierten Teilbandsignals
$Y_{A,l}(e^{j\omega})$	DTFT-Spektrum des Aliasing-Anteils eines dezimierten und verarbeiteten Teilbandsignals
$Y_{U,l}(e^{j\omega})$	DTFT-Spektrum des Nutzanteils eines dezimierten und verarbeiteten Teilbandsignals
$\tilde{Y}_l(e^{j\Omega})$	DTFT-Spektrum eines aufwärtsgetasteten Teilbandsignals
$\tilde{Y}_{A,l}(e^{j\Omega})$	DTFT-Spektrum des Aliasing-Anteils eines aufwärtsgetasteten Teilbandsignals
$\tilde{Y}_{U,l}(e^{j\Omega})$	DTFT-Spektrum des Nutzanteils eines aufwärtsgetasteten Teilbandsignals
$Y'_l(e^{j\Omega})$	DTFT-Spektrum eines aufwärtsgetasteten und mit $G_l(z_i)$ gefilterten Teilbandsignals
$Y'_{A,l}(e^{j\Omega})$	DTFT-Spektrum des Aliasing-Anteils eines aufwärtsgetasteten und mit $G_l(z_i)$ gefilterten Teilbandsignals
$Y'_{U,l}(e^{j\Omega})$	DTFT-Spektrum des „Imaging“-Anteils eines aufwärtsgetasteten und mit $G_l(z_i)$ gefilterten Teilbandsignals
$Y'_{U,l}(e^{j\Omega})$	DTFT-Spektrum des Nutzanteils eines aufwärtsgetasteten und mit $G_l(z_i)$ gefilterten Teilbandsignals
z	allgemeiner komplexer Frequenzparameter in der z-Ebene
z_d	komplexer Frequenzparameter in der z-Ebene, bezogen auf reduzierte Abtastrate f_d der Teilbandsignale des FBS (Kap. 2-6)
z_i	komplexer Frequenzparameter in der z-Ebene, bezogen auf Abtastrate f_i des Eingangs- bzw. Ausgangssignals des FBS (Kap. 2-6)
\mathbb{Z}	Algebra der ganzen Zahlen
β_U	Gesamtverstärkung des FBS
β_U^ϕ	Gesamtverstärkung des FBS für TBV-Phasenwinkel $\varrho_l \equiv \phi_l$ mit Drehfaktoren (A.14) nach KURBIEL
$\beta_U^{(0)}$	Gesamtverstärkung des FBS für TBV-Phasenwinkel $\varrho_l \equiv 0$
β_U°	robuste Gesamtverstärkung des FBS
$\delta_{S,b}$	frequenzkonstante Basis-Sperrtoleranz
$\delta_{S,g}(\Omega)$	verstärkungsangepasste Sperrtoleranz
$\delta_{S,G}(\Omega)$	zulässige Sperrbereichstoleranz von $G_0(e^{j\Omega})$
$\delta_{S,H}(\Omega)$	zulässige Sperrbereichstoleranz von $H_0(e^{j\Omega})$
$\gamma_C(\Omega)$	Aufwandfaktor einer Sperrtoleranz (zur Erzielung einer LMS-typischen Sperrdämpfung)

$\gamma_{L,G}(\Omega)$	Lobes-Faktor [17] für $G_0(e^{j\Omega})$
$\gamma_{L,H}(\Omega)$	Lobes-Faktor [17] für $H_0(e^{j\Omega})$
$\Delta\tilde{b}_{w,\mu}(\Omega)$	Wunsch-Phasendifferenz des μ -ten orthogonalen Systems, $\mu = 1, \dots, s-1$, gegenüber dem orthogonalen System $\tilde{H}_0(z)$
$\Delta^2\tilde{b}_{w,\mu}(\Omega)$	Änderungen (8.49) der Wunsch-Phasendifferenzen des μ -ten orthogonalen Systems
$\Delta\Omega$	spektrale Bandbreite der Übergangsbereiche (Kap. 8)
$\Delta\Omega_I$	spektraler Abstand der Mittenfrequenzen in einem FBS (Kap. 4-6)
$\Delta\Omega_M$	spektraler Abstand der Modulationskomponenten in einem FBS (Kap. 4-6)
ϵ_U	maximale lineare Verzerrung des FBS
ϵ_U^ϕ	maximale lineare Verzerrung des FBS für TBV-Phasenwinkel $\varrho_l \equiv \phi_l$ mit Drehfaktoren (A.14) nach KURBIEL
$\epsilon_U^{(0)}$	maximale lineare Verzerrung des FBS für TBV-Phasenwinkel $\varrho_l \equiv 0$
ϵ_U^0	robuste maximale lineare Verzerrung des FBS
ξ_l	TBV-Gewichtsfaktor, $\xi_l \in \mathbb{C}$, $l = 0, \dots, I-1$
ϱ_l	TBV-Phasenwinkel, $\varrho_l \in \mathbb{R}$, $l = 0, \dots, I-1$
τ	Signalverzögerung des gesamten FBS
$\tau_{g,H}(\Omega)$	Gruppenlaufzeit von $H_0(z)$
ω	Frequenz, normiert auf reduzierte Abtastrate f_d der Teilbandsignale des FBS
Ω	Frequenz, normiert auf Abtastrate f_i des Eingangs- bzw. Ausgangssignals des FBS
Ω_S	Sperrgrenze $\frac{2\pi}{M}$ des Prototypfilters eines FBS

Konventionen und Operatoren

a	reelle oder komplexe Variable
\mathbf{a}	hyperkomplexe Variable (inkl. $\mathbf{a} \in \mathbb{D}$)
\mathbf{a}	Vektor (mit reellen, komplexen oder hyperkomplexen Elementen)
\mathbf{A}	Matrix (mit reellen, komplexen oder hyperkomplexen Elementen)
\mathcal{A}	Menge
\mathbb{A}	Algebra
\mathbb{A}_D	D -fach (kommutativ) verdoppelte Algebra \mathbb{A}
\mathbb{A}^n	n -dimensionale Vektoralgebra mit Elementen der Algebra \mathbb{A}
$\mathbb{A}^{n \times m}$	$n \times m$ -dimensionale Matrixalgebra mit Elementen der Algebra \mathbb{A}
$\overline{\{\mathbf{a}\}}$	Konjugation (7.60) einer hyperkomplexen Variable \mathbf{a}

$ a $	Betrag (7.62) einer hyperkomplexen Variable \mathbf{a}
$\ \mathbf{a}\ _N$	Semi-Norm (7.59) einer hyperkomplexen Variable \mathbf{a}
$\langle \tilde{\mathbf{a}}_0, \dots, \tilde{\mathbf{a}}_{s-1} \rangle$	orthogonale Darstellung einer hyperkomplexen Variable \mathbf{a} durch s (hyperkomplexe) Komponenten
$\tilde{\mathbf{a}}_\mu$	μ -te orthogonale (hyperkomplexe) Komponente einer hyperkomplexen Variable
\mathbf{A}^T	transponierte Matrix \mathbf{A}
\mathbf{A}^{T*}	konjugiert-transponierte Matrix \mathbf{A}
$\{\cdot\}^*$	komplexe Konjugation
$x \in [a, b]$	x aus Menge $x \in \{x : a \leq x \leq b\}$
$x \in]a, b]$	x aus Menge $x \in \{x : a < x \leq b\}$
$x \in [a, b[$	x aus Menge $x \in \{x : a \leq x < b\}$
$x = a, \dots, b$	x aus der ganzzahligen Menge $x \in \{x : a \leq x < b\}$
$f(x) \equiv a$	$f(x) = a \forall x$
$\lfloor x \rfloor$	x wird abgerundet, $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$
$\lceil x \rceil$	x wird aufgerundet, $\lceil x \rceil \in \mathbb{Z}$
\vee	Oder-Verknüpfung
\wedge	Und-Verknüpfung
$*$	lineare Faltung
\otimes	KRONECKER-Produkt
$\arg \{a\}$	Phasenwinkel einer komplexen Zahl a
$\text{diag} \{a, \dots, b\}$	Diagonalmatrix aus den Elementen a, \dots, b
$\mathcal{E} \{\cdot\}$	Erwartungswert
$a \bmod b$	a modulo b
$\text{Im } a$	Imaginärteil einer komplexen Zahl a
$\text{Im } \mathbf{a}$	Imaginärteil einer verallgemeinerten komplexen Zahl \mathbf{a}
$\text{Re } a$	Realteil einer komplexen Zahl a
$\text{Re } \mathbf{a}$	Realteil einer hyperkomplexen Zahl \mathbf{a}
$\mathcal{Z} \{\cdot\}$	z -Transformation
$H(z)$	Übertragungsfunktion eines reellen oder komplexen Systems
$\mathbf{H}(z)$	Übertragungsfunktion eines hyperkomplexen Systems
$\tilde{\mathbf{H}}(z)$	Übertragungsfunktion des μ -ten orthogonalen Teilsystems eines hyperkomplexen Systems, $\mu = 0, \dots, s - 1$
$\mathbf{H}(z)$	Übertragungsmatrix eines hyperkomplexen Systems
$\tilde{\mathbf{H}}(z)$	(diagonale) Übertragungsmatrix eines orthogonalisierten hyperkomplexen Systems