

Trierer Systemtechnik

**Wassili Buerakov**

**Identifikation mechanischer Strukturen  
mittels experimenteller Modalanalyse**

Shaker Verlag  
Aachen 2012

**Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Copyright Shaker Verlag 2012

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-0837-1

ISSN 2190-6076

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen

Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9

Internet: [www.shaker.de](http://www.shaker.de) • E-Mail: [info@shaker.de](mailto:info@shaker.de)

## Vorwort

Das vorliegende Buch ist aus einer Masterthesis entstanden, die an der Wehrtechnischen Dienststelle (WTD 41) Trier unter der Betreuung von Herrn Zils, Mitarbeiter der WTD 41, und unter der Betreuung von Herrn Prof. Dr.-Ing. U. Zimmermann aus dem Fachbereich Maschinenbau der Fachhochschule Trier angefertigt wurde. Es enthält wesentliche Grundlagen der experimentellen Modalanalyse und stellt darauf aufbauend einige Verfahren und Geräte zur Lösung von mechanischen Schwingungsproblemstellungen vor. Die mathematisch beschriebenen Algorithmen kann der interessierte Leser mit Hilfe der enthaltenen Flussdiagramme ohne großen Aufwand in ein Computerprogramm umwandeln. Der mögliche Messaufbau mit Erläuterung der einzelnen Komponenten und der Umgang mit notwendigen Messgeräten sind ebenfalls ein Bestandteil dieses Buches.

Die Verfahren experimenteller Modalanalyse werden erstmals am Beispiel unterschiedlich komplexer Strukturen in praktischen Versuchen direkt miteinander verglichen, um die Leistungsfähigkeit der einzelnen Algorithmen aufzuzeigen. Die messtechnische Nachbearbeitung der aufzeichneten Messsignale sowohl im Zeit- als auch Frequenzbereich ist dabei von großer Bedeutung. Anhand der gewonnen Erkenntnisse werden neue Ansätze zur Verbesserung der Praxis-tauglichkeit der Verfahren vorgeschlagen.

Trier, im Januar 2012

**Die „Trierer Systemtechnik“ fokussiert für den Maschinenbau wissenschaftliche Aktivitäten im Bereich der Mechatronik, Mess- und Regelungstechnik, Antriebs- und Fluidtechnik, sowie diverser Simulationstechniken. Darüber hinaus ist mit der zugehörigen Publikationsreihe ein Forum entstanden, in dem Lehr- und Fachbücher veröffentlicht werden, aber auch eigenständige umfassendere Forschungsbeiträge junger Autoren im interdisziplinären Kontext einer breiteren Öffentlichkeit zugänglich gemacht werden können. Die Reihe „Trierer Systemtechnik“ wird herausgegeben von Harald Ortwig und Uwe Zimmermann.**

**Prof. Dr.-Ing. Harald Ortwig** Studium des Maschinenbau an der RWTH Aachen, Promotion am Institut für hydraulische und pneumatische Antriebe und Steuerungen. Industrietätigkeit im Bereich Mobilhydraulik, seit 1993 an der Fachhochschule Trier.

**Prof. Dr.-Ing. Uwe Zimmermann, B.E.** Studium des Maschinenbau an der RWTH Aachen und in den USA, Promotion am Institut für Regelungstechnik. Industrietätigkeit im Bereich Regelung schnelllaufender Grossdieselmotoren, seit 1995 an der Fachhochschule Trier.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Strukturdynamik</b>	<b>3</b>
1.1	Mechanische Schwingungen . . . . .	3
1.2	Übertragungsfunktion / Frequenzgang . . . . .	8
1.3	Theoretische Grundlagen der rechnerischen Modalanalyse . . . . .	10
1.4	Theoretische Grundlagen der experimentellen Modalanalyse . . . . .	12
1.4.1	Modale Kopplung . . . . .	12
1.4.2	SDOF-Verfahren (Single Degree of Freedom) . . . . .	12
1.4.3	MDOF-Verfahren (Multiple Degree of Freedom) . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Darstellungsformen von Signalen</b>	<b>13</b>
2.1	Zeitraumdarstellung . . . . .	13
2.2	Frequenzgangdarstellung . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Systemanregung</b>	<b>19</b>
<b>4</b>	<b>Versuchsaufbau</b>	<b>23</b>
4.1	Allgemeines . . . . .	23
4.2	Lagerung . . . . .	23
4.3	Messung der Systemantwort . . . . .	24
4.4	Messaufbau . . . . .	25
4.4.1	Impulshammer . . . . .	25
4.4.2	Beschleunigungssensoren . . . . .	27
4.4.3	Signalverstärker . . . . .	27
4.4.4	Signalkonditionierung . . . . .	27
4.4.5	Aufzeichnung und Abtastung der Signale . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Manuelle Modalanalyse</b>	<b>31</b>
5.1	Bestimmung der Modalgrößen aus dem Verlauf der freien Schwingung . . . . .	31
5.2	Methode der Quadratur-Näherung . . . . .	34
5.3	Circle Fitting (kurz: Circle Fit) . . . . .	35
5.4	Fazit . . . . .	37

<b>6</b>	<b>Identifikationsverfahren</b>	<b>39</b>
6.1	Verfahren der Modalanalyse (Zeitbereich) . . . . .	41
6.1.1	Complex-Exponential (Methode der komplexen Exponenten) . . . . .	41
6.1.2	Least Squares Complex Exponential method (LSCE) . . . . .	46
6.1.3	Eigensystem-Realisierungs-Algorithmus (ERA) . . . . .	47
6.1.3.1	Stochastische Anregung . . . . .	52
6.1.4	Ibrahim Zeitbereichsverfahren (Ibrahim Time Domain method (ITD)) . . . . .	54
6.1.5	Linear-Prediction-Methode . . . . .	58
6.1.6	Parametrische Verfahren . . . . .	62
6.1.6.1	AR-Modell . . . . .	63
6.1.6.2	ARMA-Modell . . . . .	65
6.1.6.3	ARX-Modell . . . . .	65
6.1.6.4	Weitere Verfahren . . . . .	66
6.1.6.5	Bestimmen der Ordnung des Modells . . . . .	66
6.1.6.6	Extrahieren der Modalgrößen . . . . .	69
6.2	Verfahren der Modalanalyse (Frequenzbereich) . . . . .	76
6.2.1	Rational Fraction Polynomial method (RFP) . . . . .	76
6.2.2	Polyreference Frequency Domain method (PFD) . . . . .	80
<b>7</b>	<b>Praktische Anwendung der Verfahren der experimentellen Modalanalyse</b>	<b>87</b>
7.1	Modalanalyse an einem künstlichen Zweimassensystem . . . . .	87
7.2	Identifikation der modalen Parameter einer Aluminiumplatte . . . . .	93
7.2.1	Messsignalbearbeitung Zeitbereich . . . . .	96
7.2.2	Messsignalbearbeitung Frequenzbereich . . . . .	96
7.2.2.1	Leistungsdichtespektren . . . . .	97
7.3	Identifikation der modalen Parameter und des kritischen Drehzahlbereichs einer Siebmaschine . . . . .	100
<b>8</b>	<b>Schwingungsformen</b>	<b>105</b>
8.1	Modal Assurance Criterion (kurz MAC) . . . . .	107
<b>9</b>	<b>Schätzung der Modellordnung</b>	<b>109</b>
<b>10</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>111</b>

# Abbildungsverzeichnis

1	Einteilung der Messmethoden experimenteller Modalanalyse . . . . .	1
1.1	Einmassenschwinger . . . . .	3
1.2	Zweimassenschwinger . . . . .	4
1.3	Beispiel für eine Schwingung in Abhängigkeit von unterschiedlichen Dämpfungsgraden . . . . .	5
1.4	Zustandsraummodell . . . . .	6
1.5	Zeitdiskretisierung . . . . .	7
1.6	Darstellung der Signale im Zeit- oder Frequenzbereich . . . . .	8
1.7	Ablaufschema der experimentellen und der rechnerischen Modalanalyse (Bei Modellverifizierung) [26] . . . . .	10
1.8	Modalkopplung: a) wenig gekoppelt, b) stark gekoppelt . . . . .	12
2.1	Impulsantwortfunktion eines Einmassenschwingers . . . . .	13
2.2	Antwort eines Einmassenschwingers auf Impulsanregung im Frequenzbereich . . . . .	14
2.3	Phasenwinkel einer Impulsanregung im Frequenzbereich . . . . .	14
2.4	Zeigerdiagramm des harmonischen Signals . . . . .	15
2.5	Imaginärteil der FRF (Frequency Response Function) eines Einmassenschwingers . . . . .	15
2.6	Realteil der FRF eines Einmassenschwingers . . . . .	16
2.7	Nyquist-Diagramm eines Einmassenschwingers . . . . .	16
2.8	3D-Spektrogramm der Impulsantwort der Aluminiumplatte . . . . .	17
2.9	2D-Spektrogramm der Impulsantwort der Aluminiumplatte . . . . .	18
3.1	Einteilung der Testsignale . . . . .	19
3.2	Dirac-Impuls dargestellt durch ein Pfeil, daneben das ideale Ergebnis der Fouriertransformierten des Dirac-Impulses . . . . .	20
3.3	Vergleich von Impulshammerspitzen . . . . .	21
4.1	Triaxialer Beschleunigungssensor . . . . .	24
4.2	Aluminiumplatte mit aufgeklebten Beschleunigungssensoren (300mm × 790mm) . . . . .	24
4.3	Schematische Darstellung des experimentellen Messaufbaus . . . . .	25

4.4	Prinzip der Systemanregung mit einem Impulshammer . . . . .	26
4.5	Erstellter Schaltplan zur Visualisierung und Aufzeichnung der Messdaten . . . . .	27
4.6	Signale von 8 Beschleunigungssensoren und einem Impulshammer (Aufgezeichnet bei einer Untersuchung der Aluminiumplatte) . . . . .	29
5.1	Impulsantwort eines Schwingers mit einem Freiheitsgrad (simuliert in MATLAB) . . . . .	32
5.2	Graphische Darstellung der Übertragungsfunktion eines Einmassenschwingers (unterteilt in Reell- und Imaginäranteile) . . . . .	34
5.3	Prinzip der Bestimmung der Eigenfrequenzen mit Hilfe des Circle-Fit-Verfahrens . . . . .	35
5.4	Nyquist-Diagramm zur Berechnung der Dämpfung . . . . .	36
5.5	Übertragungsfunktion des Zweimassenschwingers im Nyquist-Diagramm . . . . .	36
6.1	Sortierte Verfahren der experimentellen Modalanalyse [29] . . . . .	40
6.2	Flussdiagramm des CE-Verfahrens . . . . .	45
6.3	Flussdiagramm des LSCE-Verfahrens . . . . .	46
6.4	Flussdiagramm des ERA-Verfahrens . . . . .	51
6.5	Flussdiagramm des ITD-Verfahrens . . . . .	57
6.6	Berechnete Nullstellen im Einheitskreis (Messdaten: Aluminiumplatte) . . . . .	60
6.7	Flussdiagramm des LPM-Verfahrens . . . . .	61
6.8	System für die nicht-parametrische Identifikation . . . . .	62
6.9	Modellstruktur der parametrischen Identifikation . . . . .	63
6.10	Graphen der Sinus- und der Kosinusfunktion . . . . .	64
6.11	Änderung der Fisherscher Verteilung in Abhängigkeit von der Modellordnung am Beispiel der Zeitverläufe der 4 Beschleunigungssensoren bei der Untersuchung einer Aluminiumplatte . . . . .	67
6.12	Segmentierung einer Übertragungsfunktion . . . . .	68
6.13	Dialogfenster in MATLAB zur Auswahl der Modellordnung . . . . .	68
6.14	Flussdiagramm des AR-Verfahrens . . . . .	70
6.15	Flussdiagramm des ARX-Verfahrens . . . . .	72
6.16	Berechnete Eigenfrequenzen der AR-Modelle AR(2) bis AR(120) mit den Daten der Aluminiumplatte . . . . .	73
6.17	Berechnete Eigenfrequenzen der ARMA-Modelle ARMA(2) bis ARMA(100) mit den Daten der Aluminiumplatte . . . . .	74
6.18	Flussdiagramm des RFP-Verfahrens . . . . .	79
6.19	Flussdiagramm des PFD-Verfahrens . . . . .	85
7.1	Vergleichende Darstellung des relativen Fehlers bei der Berechnung der Eigenfrequenzen . . . . .	89
7.2	Vergleichende Darstellung des relativen Fehlers bei der Berechnung der modalen Dämpfung aller Verfahren . . . . .	90
7.3	Antwort eines Zweimassensystems auf Impulsanregung (Nutzsignal) . . . . .	91

7.4	Gaussverteiltes Rauschen . . . . .	91
7.5	Verrauschtes Nutzsignal . . . . .	91
7.6	Relativer Fehler bei Berechnung der Eigenfrequenzen in Abhängigkeit von der Amplitude des Rauschsignals . . . . .	92
7.7	Relativer Fehler in Abhängigkeit des Verhältnisses Nutzsignals/Störsignal . . . . .	93
7.8	Berechnete Eigenfrequenzen der Aluminiumplatte . . . . .	94
7.9	Relativer Fehler bei der Ermittlung der Eigenfrequenzen der Aluminiumplatte . . . . .	95
7.10	Beispiel der Schwebung (Überlagerung der Schwingungen der Aluminiumplatte) von zwei Beschleunigungssensoren . . . . .	96
7.11	Fouriertransformierte der Impulsantwortfunktion der Aluminiumplatte (verwendet wurde weiche Impulshammerspitze) . . . . .	97
7.12	Leistungsdichtespektrum der Impulsantwort der Aluminiumplatte (mit Hammingfenster) . . . . .	98
7.13	8-te Eigenschwingungsform bei 139 Hz, berechnet mit Ansys 13.0 . . . . .	100
7.14	Siebmaschine mit aufgeklebten Beschleunigungssensoren . . . . .	101
7.15	Ordnungsanalyse mit Hilfe eines Spektrogramms . . . . .	102
7.16	Campbell-Diagramm des untersuchten Siebkastens . . . . .	103
8.1	Prinzip der Bestimmung der Schwingungsmoden einer Struktur . . . . .	105
8.2	Vergleich der ersten 5 Schwingungsformen (a) MATLAB (rechnerische Modalanalyse), b) CATIA, c) ANSYS) . . . . .	106
8.3	MAC-Vergleich der Verfahren CE und ITD . . . . .	108
9.1	Stabilisierungsdiagramm des ITD-Verfahrens (Messobjekt Aluminiumplatte) . . . . .	109
9.2	Eigenvektoren der ersten Eigenform ermittelt mit ITD-Algorithmus . . . . .	110

## Verzeichnis verwendeter Symbole

### Abkürzungen

IRF	Impulse Response Funktion
FRF	Frequency Response Funktion
SDOF	Single Degree of Freedom
MDOF	Multi Degree of Freedom
SISO	Single Input Single Output
MIMO	Multiple Input Multiple Output
CE	Complex-Exponential
LSCE	Least Square Complex-Exponential
ERA	Eigensystem-Realisierungs-Algorithmus
ITD	Ibrahim Time Domain method
LPM	Linear Prediction method
AR	Auto-Regressiver Prozess
ARX	Autoregressive with exogenous input
ARMA	Autoregressive moving average
RFP	Rational Fraction Polynomial
PFDF	Polyreference Frequency Domain Method
FFT	Fast Fourier Transformation
MAC	Modal Assurance Criterion
GUI	Graphical User Interface
SVD	Singular Value Decomposition
SNR	Signal-to-Noise Ratio

**Formelsymbole**

Zeichen	Einheit	Bezeichnung
$A$		Systemmatrix
$a$	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$	Beschleunigung
$B$		Erregungsmatrix
$b$		Normierungsfaktor
$C$		Steifigkeitsmatrix
$c$	$\left[\frac{N}{m}\right]$	Steifigkeit
$D$		Durchgriffsmatrix
$D_r$	$[\%]$	Dämpfungsrate
$E$		Fehlerfunktionsmatrix
$F$	$[N]$	Kraft
$f_{Abtast}$	$[Hz]$	Abtastfrequenz
$f$	$[Hz]$	Eigenfrequenz
$G_k$		Greensche Funktion
$H$		Übertragungsfunktion
$H_{Hank}$		Hankelmatrix
$I$		Einheitsmatrix
$K$		Dämpfungsmatrix
$k$	$\left[kgs^{-1}\right]$	Dämpfung
$M$		Massenmatrix
$m$	$[kg]$	Masse
$N$		Anzahl der Freiheitsgrade
$P$		Beobachtbarkeitsmatrix
$P_{Signal}$	$[W]$	Signalleistung
$Q$		Steuerbarkeitsmatrix
$R$		Residuum

---

Zeichen	Einheit	Bezeichnung
$R^*$		Residuum (konjugiert komplex)
$T_d$	$[s]$	Schwingungsdauer
$t$	$[s]$	Zeit
$u_k$		Deterministische Eingangsfolge
$V$		Gradient
$V_{eig}$		Eigenvektoren
$v$	$[\frac{m}{s}]$	Geschwindigkeit
$z_r$		Polstellen
$y$		Ausgangssignal
$x$	$[m]$	Verschiebung
$\dot{x}$	$[\frac{m}{s}]$	Geschwindigkeit
$\ddot{x}$	$[\frac{m}{s^2}]$	Beschleunigung
$\xi$	$[s]$	Dämpfungsgrad