

# Lösung des Dirichletproblems für $G$ -minimale Graphen mit einer Kontinuitäts- und Approximationsmethode

Von der Fakultät für Mathematik, Naturwissenschaften und Informatik  
der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Naturwissenschaften  
(Dr. rer. nat.)

genehmigte Dissertation

vorgelegt von

**Diplom-Mathematikerin**

**Claudia Szerement, geb. Werner**

geboren am 27.01.1982 in Cottbus

**Gutachter:** Prof. Dr. Friedrich Sauvigny

**Gutachter:** Prof. Dr. Steffen Fröhlich

**Gutachter:** Prof. Dr. Ulrich Dierkes

**Tag der mündlichen Prüfung:** 10. Juni 2011



Berichte aus der Mathematik

**Claudia Szerement**

**Lösung des Dirichletproblems  
für  $G$ -minimale Graphen  
mit einer Kontinuitäts- und  
Approximationsmethode**

Shaker Verlag  
Aachen 2012

**Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Zugl.: Cottbus, BTU, Diss., 2011

Copyright Shaker Verlag 2012

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-0758-9

ISSN 0945-0882

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen

Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9

Internet: [www.shaker.de](http://www.shaker.de) • E-Mail: [info@shaker.de](mailto:info@shaker.de)

# Vorwort

Wir betrachten in dieser Arbeit das Dirichletproblem für sogenannte  $G$ -minimale Graphen in zwei Dimensionen. Dies sind Immersionen vom Minimalflächentyp, welche sich als Graph über einem ebenen Gebiet darstellen lassen. Mit Hilfe einer Gewichtsmatrix  $G$  leiten wir eine quasilineare, elliptische und homogene Differentialgleichung für diese Höhenfunktion her. Dann lösen wir das Dirichletproblem auf konvexen Gebieten  $\Omega$  ohne Differenzierbarkeitsvoraussetzungen zu stetigen Randdaten mit einer konstruktiven Kontinuitäts- und Approximationsmethode. Dabei leiten wir zunächst eine a priori  $C^{1+\alpha}$ -Abschätzung der Lösung bis zum Rand her, indem wir uns auf die dichte Problemklasse von strikt konvexen  $C^{2+\alpha}$ -Gebieten und  $C^{2+\alpha}$ -Randdaten zurückziehen. Mit einem Satz über die Graphenstabilität und -kompaktheit lösen wir dieses Randwertproblem durch eine nichtlineare Kontinuitätsmethode. Anschließend führen wir gewichtet konforme Parameter in den Graphen ein und betrachten das parametrische Problem auf der Einheitskreisscheibe. Mit einem Approximationsargument und einem parametrischen Kompaktheitssatz lösen wir schließlich das ursprüngliche Dirichletproblem.

Mein herzlicher Dank gilt an dieser Stelle meinem akademischen Lehrer und Betreuer dieser Arbeit Herrn Prof. Dr. F. Sauvigny für das in mich gesetzte Vertrauen, konstruktive Gespräche und die gesamte wissenschaftliche Ausbildung. Durch seine hervorragenden Vorlesungen und Seminare wurde mein Interesse an der Theorie partieller Differentialgleichungen und der Differentialgeometrie geweckt und geschult. Wertvolle Hinweise und Anregungen verdanke ich ebenso Herrn Prof. Dr. S. Fröhlich, der für mich stets Zeit fand. Erwähnen und danken möchte ich auch Herrn Dr. M. Bergner für fruchtbare Diskussionen im Laufe der letzten Jahre.

Mein ganz persönlicher Dank gilt meiner Familie und meinen Freunden, die mich durch motivierende Worte unterstützt, Freiräume geschaffen und zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Grundlagen der gewichteten Differentialgeometrie</b>	<b>7</b>
1.1 Flächen im $\mathbb{R}^3$	7
1.2 Die Gewichtsmatrix und die gewichteten Fundamentalformen	8
1.3 Krümmungsbegriffe	12
1.4 Spezielle Parametersysteme	14
1.5 Die gewichteten Ableitungsgleichungen	16
1.6 Die gewichteten Codazzi-Mainardi-Gleichungen	18
<b>2 <math>G</math>-Minimalflächen und ihre Interpretation</b>	<b>21</b>
2.1 Definition $G$ -Minimalflächen und Deutung	21
2.2 $G$ -minimale Graphen als quasilineare, elliptische Differentialgleichungen	23
2.3 $G$ -Minimalflächen aus Variationsproblemen	29
2.4 Divergenzdarstellung nach Bers	38
2.5 Historische Bemerkungen	39
<b>3 Differentialgleichungen für Flächenvektor <math>X</math> und Normalenvektor <math>N</math></b>	<b>49</b>
3.1 Ein elliptisches System für den Flächenvektor $X$	49
3.2 Ein elliptisches System für den Normalenvektor $N$	50
3.3 Abschätzung von $ \Delta X $ und $ \Delta N $	53
3.4 Ein alternatives elliptisches System für $N$ in beliebigen Parametern	56
<b>4 Dirichletproblem für strikt konvexe Gebiete - die Kontinuitätsmethode</b>	<b>61</b>
4.1 $C^0$ -Abschätzung und Eindeutigkeit	62
4.2 Randgradientenabschätzung	64
4.3 Innere Gradientenabschätzung	67
4.4 Globale Hölderabschätzung des Gradienten	68
4.5 Graphenkompaktheit	81
4.6 Graphenstabilität	82
4.7 Lösung des Dirichletproblems mit der Kontinuitätsmethode	87
<b>5 Dirichletproblem für konvexe Gebiete - die Approximationsmethode</b>	<b>89</b>
5.1 A-priori-Abschätzungen	89
5.1.1 Abschätzung des Oberflächeninhalts	89

5.1.2	Die ebene Abbildung $f$ und Abschätzung des Oberflächenelements $W$ . . . . .	93
5.1.3	Stetigkeitsmodule für $X$ und $N$ . . . . .	98
5.2	Parametrischer Kompaktheitssatz . . . . .	104
5.3	Approximation konvexer Gebiete . . . . .	109
5.4	Lösung des Dirichletproblems mit der Approximationsmethode . . . . .	112
	<b>Anhang</b>	<b>115</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>121</b>