

Piezoelectric Travelling Wave Ultrasonic Motors  
based on the Shear Effect  
with Radially Polarised Annular Stator

Dem Fachbereich Maschinenbau  
an der Technischen Universität Darmstadt  
zur  
Erlangung des Grades eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)  
eingereichte

**Dissertation**

vorgelegt von  
**Ana Costa Conrado, M.Sc.**  
aus Rio de Janeiro

Berichterstatter: Prof. Dr./Univ. de São Paulo Peter Hagedorn  
Mitberichterstatter: Prof. Dr.-Ing. Richard Markert  
Tag der Einreichung: 07. Februar 2011  
Tag der mündlichen Prüfung: 26. April 2011

Darmstadt 2011

Gedruckt mit Unterstützung des Deutschen Akademischen Austauschdienstes

Berichte aus dem Maschinenbau

**Ana Costa Conrado**

**Piezoelectric Travelling Wave Ultrasonic Motors  
based on the Shear Effect with Radially Polarised  
Annular Stator**

D 17 (Diss. TU Darmstadt)

Shaker Verlag  
Aachen 2011

**Bibliographic information published by the Deutsche Nationalbibliothek**

The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available in the Internet at <http://dnb.d-nb.de>.

Zugl.: Darmstadt, Techn. Univ., Diss., 2011

Copyright Shaker Verlag 2011

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the prior permission of the publishers.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-0421-2

ISSN 0945-0874

Shaker Verlag GmbH • P.O. BOX 101818 • D-52018 Aachen

Phone: 0049/2407/9596-0 • Telefax: 0049/2407/9596-9

Internet: [www.shaker.de](http://www.shaker.de) • e-mail: [info@shaker.de](mailto:info@shaker.de)

---

## Abstract

The present thesis is concerned with the mathematical-analytical model of a piezoelectric travelling wave ultrasonic motor (USM) based on the shear effect. USMs have been adopted in high precision applications such as in the robotics, automotive industry, medical devices and autofocus of camera lenses. They are characterised by compact size, low speed with high torque and zero backlash. Since the shear piezoelectric coupling factor and the shear piezoelectric constant are higher than for the other piezoelectric effects, a relative higher torque and a better efficiency are also attained.

In this thesis, special attention is paid to the kinematics and the geometry of the motor parts and to characteristics that influence efficiency and torque. In the motor, the stator is of disc-type, made of piezoceramics and radially polarised. It is therefore modelled as an annular REISSNER-MINDLIN plate with piezoelectric terms. RAYLEIGH-RITZ discretisation is used to obtain eigenfrequencies and eigenmodes of the stator plate. In the laboratory, measured eigenfrequencies of the free vibrations of the plate corroborate the numerical method. Particularly, the generation of travelling waves requests the excitation of two degenerated vibration modes. This requires a specific electrode configuration and, in this case, the design of a voltage inverter.

A suitable vibration mode is chosen as working mode for the motor, so that the energy loss through friction in the radial direction is minimised. The transmission of load from stator to rotor occurs through a ring of teeth over the stator. Instead of just estimating the influence of the teeth on the stator model, the kinetic energy of the teeth set is formulated and taken into account in the equations of motion. Additionally, the conditions for the symmetry of the stator are stated with respect to the disposition and the number of teeth. In the contact model, point contact with a rigid rotor is assumed.

The present mathematical-analytical model, which is characterised by a few degrees of freedom, is able to deliver relevant characteristics of the considered USM. The transient behaviour can be numerically solved and performance parameters such as power and efficiency (at steady state) can be calculated. It allows a systematical optimisation of the motor with respect to its geometry, its size, the number and disposition of the teeth, as well as the electric excitation. The influence of the teeth and the electric excitation is depicted in performance curves such as speed-torque and efficiency-torque curves.

## Kurzfassung

Die vorliegende Dissertation befasst sich mit der mathematisch-analytischen Modellierung eines auf dem Schubeffekt basierenden piezoelektrischen Ultraschall-Wanderwellenmotors (USM). Ultraschallmotoren finden Anwendungen, wenn höchste Präzision gefragt ist, so z. B. in der Robotik, in der Automobilindustrie, bei medizinischen Geräten und in Autofokus-Kameras. Sie zeichnen sich aus durch kompakte Größe, hohes Drehmoment bei niedriger Geschwindigkeit und rückschlagfreies Arbeiten. Da die piezoelektrische elektromechanische Kopplung und die piezoelektrische Konstante beim Schubeffekt größer sind als bei anderen Effekten, werden hier auch ein relativ höheres Drehmoment und ein besserer Wirkungsgrad erzielt.

In dieser Arbeit verdienen die Kinematik und die Geometrie der Motorteile sowie Eigenschaften, die den Wirkungsgrad und das Drehmoment beeinflussen, besondere Aufmerksamkeit. In dem Motor ist der Stator ringförmig, besteht aus Piezokeramik und ist radial polarisiert. Der Stator wird deswegen als ringförmige REISSNER-MINDLIN-Platte mit piezoelektrischen Termen modelliert. Es wird das RAYLEIGH-RITZ-Verfahren benutzt, um Eigenfrequenzen und Eigenformen der Statorplatte zu ermitteln. Die im Labor gemessenen Eigenfrequenzen von der freien Schwingungen der Platte bestätigen die numerisch berechneten Werte. Zur Erzeugung von Wanderwellen bedarf es der Anregung von zwei entarteten Schwingungsformen. Das geschieht über eine spezifische Elektrodenkonfiguration und setzt in diesem Fall das Design eines Spannungsspiegels voraus.

Für den Betriebsmodus des Motors wird eine solche Schwingungsform gewählt, dass der Energieverlust durch Reibung in radialer Richtung minimiert ist. Die Kraftübertragung vom Stator auf den Rotor erfolgt über eine kreisförmige Reihe von Zähnen. Der Einfluss von den Zähnen auf den Stator wird nicht abgeschätzt, sondern ihre kinetische Energie wird formuliert und in den Bewegungsgleichungen berücksichtigt. Außerdem werden Bedingungen für die Symmetrie des Stators bezüglich der Position und der Anzahl der Zähne festgelegt. Im Kontaktmodell wird Punktkontakt mit dem starren Rotor angenommen.

Das vorliegende mathematisch-analytische Modell, das sich durch eine geringe Anzahl von Freiheitsgraden auszeichnet, ist in der Lage, relevante Eigenschaften des hier betrachteten USM zu ermitteln. Zeitverläufe können numerisch gerechnet werden und Betriebeigenschaften wie Leistung und Wirkungsgrad (im stationären Zustand) können gerechnet werden. Das ermöglicht eine systematische Optimierung des Motors in Bezug auf seine Geometrie, seine Größe, die Anzahl und Position der Zähne sowie seine elektrische Anregung. Der Einfluss der Zähne und der elektrischen Anregung wird anhand von Drehmoment-Drehgeschwindigkeit-Kennlinie und Drehmoment-Wirkungsgrad-Kennlinie dargestellt.

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Piezoelectric ultrasonic motors: definition and applications . . . . .	1
1.2	Motivation of the analytical model . . . . .	2
1.3	Outline . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Shear Effect and Piezoelectric Motors</b>	<b>5</b>
2.1	Piezoelectricity . . . . .	5
2.1.1	History . . . . .	5
2.1.2	Piezoelectric materials . . . . .	5
2.2	Piezoelectric effects . . . . .	6
2.3	Linear piezoelectric constitutive equations . . . . .	8
2.4	Classification of piezoelectric motors . . . . .	11
2.5	$d_{15}$ piezoelectric motors . . . . .	12
2.5.1	Disc-type travelling wave ultrasonic motor . . . . .	12
2.5.2	Efficiency and electromechanical coupling coefficient . . . . .	14
2.5.3	Criteria for the choice of the vibration working mode . . . . .	14
2.6	Working principle . . . . .	15
2.7	Exciting shear-bending travelling waves in piezoceramics . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Stator model</b>	<b>19</b>
3.1	Literature review . . . . .	19
3.2	Overview of the stator model . . . . .	20
3.3	Plate model . . . . .	21
3.3.1	Kinematics of the stator plate and working principle . . . . .	22
3.3.2	Constitutive equations . . . . .	23
3.3.3	RAYLEIGH-RITZ method for piezoelectric continuum . . . . .	27
3.4	Measured and calculated eigenfrequencies for the free plate . . . . .	31
3.4.1	Voltage inverter for generating travelling waves in the laboratory . . . . .	33
3.5	Numerically calculated vibration modes and discussion . . . . .	34
3.6	Discretisation of the equations of motion . . . . .	38
3.6.1	Electrical excitation . . . . .	39
3.6.2	Equations of motion . . . . .	41
3.7	Stator with notches . . . . .	44
3.7.1	Teeth geometry and placement . . . . .	44

3.7.2	Kinematics of the teeth . . . . .	46
3.7.3	Kinetic energy of a tooth . . . . .	47
3.7.4	Discretisation of the kinetic energy . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Contact</b>	<b>51</b>
4.1	Contact problem in travelling wave ultrasonic motors . . . . .	51
4.2	Kinematics of the stator . . . . .	52
4.3	Contact forces . . . . .	54
4.4	COULOMB's friction . . . . .	54
4.5	Work of the contact forces . . . . .	54
4.6	Contact forces in the equations of motion . . . . .	55
4.7	Rotor model . . . . .	55
4.7.1	Kinematics . . . . .	56
4.7.2	Relative velocity . . . . .	57
4.7.3	Dynamics . . . . .	58
4.8	Steady state operation . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Simulation results</b>	<b>61</b>
5.1	Power considerations . . . . .	61
5.1.1	Output power . . . . .	61
5.1.2	Input power . . . . .	62
5.1.3	Efficiency . . . . .	63
5.2	Transient behaviour . . . . .	63
5.3	Performance characteristics . . . . .	66
5.3.1	Effect of the teeth . . . . .	66
5.3.2	Effect of the excitation voltage . . . . .	68
5.3.3	Excitation frequency . . . . .	70
<b>6</b>	<b>Summary and concluding remarks</b>	<b>71</b>
<b>A</b>	<b>Orthogonal polynomials</b>	<b>73</b>
<b>B</b>	<b>Mode shapes</b>	<b>75</b>
<b>C</b>	<b>Voltage inverter</b>	<b>79</b>
	<b>Bibliography</b>	<b>83</b>