Berichte aus der Mathematik

Heiko Reppe

Three Generalisations of Lattice Distributivity: An FCA Perspective

Shaker Verlag
Aachen 2011

Bibliographic information published by the Deutsche Nationalbibliothek
The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available in the Internet at http://dnb.d-nb.de.

Zugl.: Dresden, Techn. Univ., Diss., 2011

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-0037-5
ISSN 0945-0882

Shaker Verlag GmbH • P.O. BOX 101818 • D-52018 Aachen
Phone: 0049/2407/9596-0 • Telefax: 0049/2407/9596-9
Internet: www.shaker.de • e-mail: info@shaker.de

Zusammenfassung der Dissertation

Three Generalisations of Lattice Distributivity: An FCA Perspective

Ein Verband kann als algebraische Struktur $\underline{L} = (L, \vee, \wedge)$ vom Typ $(2, 2)$ oder auch als relationale Struktur $(L, \leq)$ aufgefasst werden. Die formale Begriffsanalyse bringt einen weiteren Aspekt hinzu, denn jeder vollständige Verband lässt sich als Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ eines geeigneten Kontext $\mathbb{K}$ auffassen. Schließlich bildet jedes Hüllensystem einen vollständigen Verband und jedem Hüllensystem ist in ein-eindeutiger Weise ein Hüllenoperator zugeordnet. Dies erlaubt nun vier verschiedene Sichtweisen auf die mathematische Struktur *vollständiger Verband* (algebraische Struktur, relationale Struktur, formaler Kontext und Hüllenoperator – diesen betrachte ich als Menge von Implikationen).

In meiner Arbeit interessiere ich mich für algebraische Eigenschaften von Verbänden, die durch Verallgemeinerungen des Distributivgesetzes beschrieben werden können. Insbesondere betrachte ich hauptsächlich die Eigenschaften n-Distributivität, n-Modularität und n-$\vee$-Semidistributivität. Ich untersuche die Frage: Kann man direkt am Verband $(L, \leq)$, am Hüllenoperator oder am formalen Kontext eines vollständigen Verbandes erkennen, ob eine dieser Verbandeigenschaften erfüllt ist? Diese drei Eigenschaften stellen sich als weitestgehen unabhängig von einander heraus.

Die vorliegende Arbeit ist in fünf Kapitel gegliedert. Das erste Kapitel behandelt die n-Distributivität. Sei n positiv und ganzzahlig. Ein Verband $\underline{L}$ wird n-distributiv genannt, wenn für alle x, y_0, $\ldots$, $y_n \in L$ gilt:

$$x \vee (\bigwedge_{i=0}^{n} y_i) = \bigwedge_{j=0}^{n} (x \vee \bigwedge_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} y_i).$$

In der nachfolgenden Charakterisierung dieser Eigenschaft verwenden wir die Bezeichung Implikation mit echter Prämisse. Das sind Implikation zwischen Merkmalen des formalen Kontexts, bei denen jedes Merkmal der Prämisse notwendig ist um die (nicht leere) Konklusion abzuleiten.

Theorem. *Sei $\mathbb{K} = (G, M, I)$ ein doppelt fundierter formaler Kontext. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ *ist n-distributiv.*
2. *Jede Implikation $A \to A^\bullet$ (mit einer echten Prämisse) erfüllt die Bedingung: entweder A hat höchstens n Elemente oder alle Elemente von $A^\bullet$ sind reduzibel.*
3. *Jedes Merkmal $m \in M$, für das μm $\bigwedge$-irreduzibel in $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ ist, erfüllt:*

$$A \subseteq M, |A| > n \text{ und } A \text{ unabhängig in } m^{\swarrow} \Rightarrow m^{\swarrow} \cap A'' \neq \emptyset.$$

Der zweite Punkt dieses Theorems ist mit dem Begriff des Charakters verwandt. Ich beschreibe den Unterschied dieser beiden Begriffe. Die dritte Charakterisierung benutzt die

Pfeilrelationen des formalen Kontexts, denn $m^{\swarrow} := \{g \in | \, g \swarrow m\}$. Im Fall der n-Distributivität konnte ich also durch das Theorem eine Charakterisierung der Verbandseigenschaft im formalen Kontext und in einem geeigneten Hüllensystem erzielen. Eine Charakterisierung der n-Distributivität mit Hilfe von Unterstrukturen des Verbandes konnte ich ebenfalls angeben. Für die folgenden beiden Eigenschaften wurden Teilerfolge in dieser Richtung erzielt.

Das Kapitel zwei behandelt die n-Modularität. Sei $\underline{L}$ ein Verband, $x, y, z \in L$ und $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren die folgende Polynome:

$$\begin{array}{lll}
p_0 := x, & q_0 := y, & r_0 := z, \\
p_1 := x \vee (y \wedge z), & q_1 := y \vee (x \wedge z), & r_1 := z \vee (x \wedge y), \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
p_{n+1} := p_n \vee (q_n \wedge r_n), & q_{n+1} := q_n \vee (p_n \wedge r_n), & r_{n+1} := r_n \vee (p_n \wedge q_n).
\end{array}$$

Für $n > 0$ sei außerdem die Verbandsidentität μ_n definiert durch $p_n = p_{n+1}$. Ein Verband, der μ_n erfüllt, wird *n-modular* genannt.

Zur Bestimmung des kleinsten $n \in \mathbb{N}$, für das ein Verband n-modular ist, spielen solche dreielementige Antiketten des Verbandes eine wichtige Rolle die kein *balanciertes Tripel* bilden. Andererseits ist die Menge der balancierten Tripel eines endlichen Verbandes wiederum verbandsgeordnet. Ich gebe den reduzierten Kontext zum Verband der balancierten Tripel an. Das Verständnis dieser hat geholfen, den Unterschied zwischen dem Tensorprodukt von Begriffsverbänden und dem Verband der Bindungen von deren formalen Kontexten weiter zu ergründen. Daraus resultiert ein Tensorprodukt für Begriffsverbände, dass einen zum Verband der Bindungen der Kontexte isomorphen Verband liefert.

Das zweite Kapitel meiner Arbeit beschäftigt sich zudem mit der Frage nach dem freien, von drei Elementen erzeugten, 2-distributiven und dual 2-distributiven Verband. Dieser ist unendlich. Für den freien, von drei Elementen erzeugten, 2-distributiven, dual 2-distributiven, 2-modularen und dual 2-modularen Verband gebe ich eine Liste von subdirekt irreduziblen Verbänden an, die dieser enthält. Die Vollständigkeit dieser Liste konnte nicht gezeigt werden. Allerdings ist abzusehen, dass diese Struktur sehr groß wird. Der freie, von drei Elementen erzeugte, 2-distributive und dual 2-distributive Verband ist unendlich groß.

Sei k positiv und ganzzahlig. Ein vollständiger Verband $\underline{L}$ heißt *k-$\vee$-semidistributiv* genau dann, wenn die folgende Implikation für alle $x, y_0, \dots, y_k \in L$ gilt:

$$\text{aus } x \vee y_0 = \dots = x \vee y_k \text{ folgt } x \vee y_0 = \bigvee_{\substack{i,j=0 \\ i \neq j}}^{k} x \vee (y_i \wedge y_j).$$

Diese Verbandseigenschaften verallgemeinern die $\vee$-Semidistributivität. Im Zusammenhang mit der $\vee$-Semidistributivität steht eine Verbandskonstruktion, die lokale Verdoppelung genannt wird. Ich konnte klären, welche Teilenmengen eines Verbandes auf diese Weise verdoppelt werden können, so dass die resultierende Struktur wiederum ein Verband ist. Für ordnungskonvexe Teilmengen eines Verbandes war dies schon bekannt. Die hier gefundenen Teilmengen bilden ebenso wie die ordnungskonvexen Teilmengen einen vollständigen Verband. Desweiteren gebe ich eine rekursive Konstruktionen für formale

Kontexte der Verbände aller Teilordnungen einer endlichen linearen Ordnung an und in ähnlicher Weise für den Verband aller Quasiordnungen auf einer endlichen Menge.

Das vierte Kapitel untersucht den Verband aller Hüllensysteme auf einer endlichen Menge. Auch für diesen Verband gebe ich eine rekursive Konstruktion zur Konstruktion des formalen Kontextes an. Darüber hinaus beschreibe ich den reduzierten Kontext aller Hüllensysteme eines vollständigen Verbandes, den reduzierten Kontext für den Verband aller vollständigen Unterverbände eines endlichen distributiven Verbandes und zeige eine Verallgemeinerung für letzgenanntes auf. Der Verband der Verbandsverfeinungen eines Hüllensystems wird als letztes in dieser Reihe beschrieben, wiederum durch die Angabe eines reduzierten Kontextes.

Schließlich gebe ich einen neuen Algorithmus an, der mit Hilfe von Implikationen mit echter Prämisse Merkmalexploration durchführt. Die Vorteile dieses Algorithmus erwachsen dann, wenn man nicht an allen Abhängigkeiten eines (großen) Kontextes interessiert ist, sondern nur an denen mit kleiner Prämisse. Zusätzlich ist die geringe Prämissengröße anwenderfreundlich.

Abschließend bereit ich in einem Appendix die Theorie der von mir eingeführten Linkslichtungen neu auf. Eine Linkslichtung einer geordneten Menge ist eine Teilmenge der Ordnungsrelation, die selbst wieder Ordnungsrelation ist und eine zusätzliche Bedingung erfüllt. Die Menge der Linkslichtungen einer längenendlichen Ordnungsrelation ist ein vollständiger Verband. Diese von mir eigeführten Strukturen verallgemeinern Tamari-Verbände und geben diesen eine rein ordnungstheoretische Interpretation.

Summary of the Thesis

Three Generalisations of Lattice Distributivity: An FCA Perspective

A lattice can be regarded as an algebraic structure $\underline{L} = (L, \vee, \wedge)$ of type $(2, 2)$ as well as a relational structure $(L, \leq)$. Formal Concept Analysis adds a new aspect to this, since every complete lattice is isomorphic to the concept lattice $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ of a certain formal context $\mathbb{K}$. Moreover, every closure system forms a complete lattice, and closure systems and closure operators are in 1-1-correspondence. Thus, there are four perspectives on the mathematical structure "complete lattice", namely algebraic structure, relational structure, a formal context, and closure operator—for which I use a set of implications.

In my thesis I am interested in algebraic lattice properties, which arise from generalisations of distributivity. In particular, I focus on the properties n-distributivity, n-modularity, and n-join-semidistributivity. I investigate the question of recognising those lattice properties directly from the concept lattice, from the closure operator, or from a formal context. The three properties appear to be independent to a considerable degree.

This study is divided into five chapters. The first chapter focuses on n-distributivity. Let n be a positive integer. A lattice $\underline{L}$ is called *n-distributive* if for all x, y_0, ..., $y_n \in L$:

$$x \vee (\bigwedge_{i=0}^{n} y_i) = \bigwedge_{j=0}^{n} (x \vee \bigwedge_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} y_i).$$

In the following characterisation of this property we use the notion of an implication with a proper premise, which is an implication between attributes of $\mathbb{K}$, such that every element of the premise is needed to obtain the (non-empty) conclusion.

Theorem. *Let $\mathbb{K} = (G, M, I)$ be a doubly founded formal context, then the following are equivalent:*

1. *$\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ is n-distributive.*
2. *Every implication $A \to A^{\bullet}$ (with a proper premise) satisfies:*

   either A has at most n elements or all elements of $A^{\bullet}$ are reducible.

3. *Every $m \in M$ such that μm is meet irreducible in $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ satisfies:*

   $A \subseteq M, |A| > n,$ *and A independent in $m^{\swarrow}$ implies* $m^{\swarrow} \cap A'' \neq \emptyset.$

The second item of this theorem is related to the notion of the character of a closure system. I describe the difference of the two concepts. The third item make use of the arrow relation in a formal context, $m^{\swarrow} := \{g \in G \mid g \swarrow m\}$. In the case of n-distributivity I achieve by the Theorem characterisations of this lattice property in the formal context as well as in a closure system. Moreover, I obtain a characterisation of n-distributivity by the help of substructures of the lattice. For the remaining two properties partial success in this direction was also achieved.

The second chapter is concerned with the n-modularity. Let $\underline{L}$ be a lattice, $x, y, z \in L$, and $n \in \mathbb{N}$. We define the following polynomials:

$$\begin{array}{lll} p_0 := x, & q_0 := y, & r_0 := z, \\ p_1 := x \vee (y \wedge z), & q_1 := y \vee (x \wedge z), & r_1 := z \vee (x \wedge y), \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n+1} := p_n \vee (q_n \wedge r_n), & q_{n+1} := q_n \vee (p_n \wedge r_n), & r_{n+1} := r_n \vee (p_n \wedge q_n). \end{array}$$

Additionally, if $n > 0$, then the lattice identity μ_n is defined as $p_n = p_{n+1}$. A lattice satisfying μ_n is called *n-modular*.

To determine of the least integer $n \in \mathbb{N}$, for which a lattice is n-modular, three-element antichains of the lattice are important that do not form a *balanced triple*. On the other hand, the set of balanced triples of a finite lattice forms a lattice. A contextual description of that lattice is here provided. This leads to a better understanding of the difference between the tensor product of concept lattices and the lattice of bonds for their formal contexts. Consequently, a tensor product for concept lattices is constructed in a way that the resulting lattice is isomorphic to the lattice of bonds of their formal contexts.

Moreover, the second chapter considers the question of the free lattice, generated by three elements, which is 2-distributive and dually 2-distributive. It turns out that this lattice is infinite. For the free lattice, generated by three elements, which is 2-distributive and dually 2-distributive as well as 2-modular and dually 2-modular, I obtain a list of subdirectly irreducible lattice. It is not yet known whether this list is complete. However, the subdirect product of those lattices turns out to be very large.

Let n be a positive integer. A complete lattice $\underline{L}$ is called *n-join-semidistributive* if the following implication holds for all $x, y_0, \ldots, y_n \in L$:

$$x \vee y_0 = \cdots = x \vee y_n \text{ implies } x \vee y_0 = \bigvee_{\substack{i,j=0 \\ i \neq j}}^{n} x \vee (y_i \wedge y_j).$$

These lattice properties generalise join-semidistributivity. Join-semidistributivity is related to a lattice construction, called local doubling. I characterise the subsets of a lattice, which can be doubled such that the result is a lattice again. This generalises results for order-convex subsets of lattices. I show that the collection of all sets, which can be doubled, also forms a complete lattice.

Furthermore, chapter three provides a formal context for one particular join-semidistributive lattice, namely the lattice of all suborder relations of a finite linear order and, likewise, for the lattice of all quasiorders of a finite set (which is not join-semidistributive). Both constructions are recursive.

The fourth chapter of my thesis deals with the lattice of all closure systems on a finite set. Here, too, I provide a concrete recursive context construction for the formal context of this lattice. In addition I provide the reduced formal context for the lattice of all closure systems of a complete lattice, the reduced context for the lattice of complete sublattices of a distributive lattice, and I show that the latter construction is generalisable to some extent. In the sequence of formal contexts I also obtain the reduced formal context of lattice refinements of a closure system.

Finally, I provide an attribute exploration algorithm, based on implications with proper premise. The advantages become apparent when a user is not interested in all dependencies between attributes, but only in those with a small size of a premise, since they seem more easy to manage. In contrast to the usual method—using the stem base—the algorithm used here accomplishes that strategy.

In an appendix, I turn to left-clearings and present them in a new light. A left-clearing of an ordered set is a subset of the order relation equipped with an additional property. The set of left-clearings of an ordered set of finite length ordered by inclusion forms a complete lattice. Lattices that arise in this way generalise Tamari-lattices and they can be explained purely by order theory.