

Wolfgang Joppich

# Grundlagen der Mehrgittermethode Einführung in Standardverfahren

W. Joppich  
Hochschule Bonn Rhein Sieg  
Fachbereich Elektrotechnik, Maschinenbau und Technikjournalismus  
Grantham Allee 20  
53757 Sankt Augustin



Berichte aus der Mathematik

**Wolfgang Joppich**

**Grundlagen der Mehrgittermethode**

Einführung in Standardverfahren

Shaker Verlag  
Aachen 2011

**Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Copyright Shaker Verlag 2011

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8322-9963-7

ISSN 0945-0882

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen

Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9

Internet: [www.shaker.de](http://www.shaker.de) • E-Mail: [info@shaker.de](mailto:info@shaker.de)

## Vorwort

Im Jahre 1985 begann ich meine Arbeiten zur Simulation der Herstellungsprozesse von Halbleiterbauelementen mit Hilfe von Mehrgitterverfahren. Dabei handelte es sich um eine praxisnahe Anwendung dieser (damals noch recht neuen) Methode zur numerischen Lösung von partiellen Differentialgleichungen. Zu dieser Zeit erschienen -oder waren gerade in Vorbereitung- einige bedeutende Monographien zum Thema Mehrgitterverfahren. Besonders zu erwähnen sind die drei meines Erachtens als *Mehrgitterklassiker* zu bezeichnenden Publikationen: der sogenannte *Guide* [6] von Brandt, die *Multigrid Methods and Applications* [14] von Hackbusch und die *Fundamentals* [36] von Stüben und Trottenberg.

Stüben und Trottenberg beklagen in [36] die mangelnde Akzeptanz und zum Teil sogar Vorurteile gegen Mehrgitterverfahren – insbesondere dann, wenn komplexe Anwendungen gelöst werden sollen. Vor dem Hintergrund der obengenannten Publikationen erhebt sich die Frage, warum dies so war.

Im universitären Bereich und in Forschungseinrichtungen waren Mehrgitterverfahren bekannt und wurden angewendet, im industriellen Umfeld waren Mehrgitterverfahren weniger bekannt, geschweige denn akzeptiert. *Akzeptanz* bedeutet dabei nicht eine *prototypische*, sondern eine *professionelle* Nutzung mit großem Anwenderkreis zur Lösung komplexer technischer Probleme. Ein derartiger Einsatz verlangt nicht nur schnelle, sondern ganz besonders robuste Algorithmen hinsichtlich der möglichen Parametervariation des Problems. Ein Grund für den Mangel an professioneller Mehrgittersoftware lag darin, daß die Forschung an Mehrgittermethoden und die Problemlösung in Anwendungsdisziplinen isolierte Bereiche waren. Für die Praxis genügt aber die Lösung von Modellproblemen nicht. Außerdem schreckt der enorme Freiheitsgrad bei der Auswahl algorithmischer Komponenten ab. Aufgrund des Tagesgeschäfts sind viele Ingenieure an schnellen Lösungen interessiert, aber zeitlich nicht in der Lage oder bereit, sich auch noch mit Feinheiten eines Lösungsalgorithmus zu beschäftigen. Daher kommt es, dass selbst bei modernen Simulationstools, die das Mehrgitterverfahren als Lösungsverfahren anbieten (z. B. [8]), dieses Verfahren selten genutzt und noch seltener effizient genutzt wird.

Diesem Übel ist nur von der Wurzel her beizukommen. Ingenieurstudenten, Studenten der Mathematik, Informatik, Physik und anderen Anwendungsgebieten sowie alle mit Interesse an numerischen Fragestellungen sollten auf einfache Art und Weise an die Mehrgittermethodik herangeführt werden. Darauf zielt dieses Buch ab. Es entwickelte sich aus einem Skript zu einer Vorlesungsreihe *Algorithmen* an der Fachhochschule Köln. Mit entsprechenden Erweiterungen dient es den deutschsprachigen Teilnehmern meines seit mehr als zehn Jahren jährlich statt-

findenden Mehrgitterkurses als praktische und überschaubare Einführung.

Die Basis der Darstellungen und Beispiele wurde mit den Kapiteln zwei und vier des aus den Dissertationen von Slobodan Mijalković und mir entstandenen Buches *Multigrid Methods for Process Simulation* [20] gelegt. Dieses Buch erschien 1993 in der von Professor Dr. Siegfried Selberherr (TU Wien) aufgelegten Reihe *Computational Microelectronics* des Springer Verlags, Wien. Die direkt diesem Buch entnommenen Abbildungen und Tabellen sind in den jeweiligen Bild- und Tabellenunterschriften mit QUELLE: [20] gekennzeichnet. Dem Springer Verlag möchte ich an dieser Stelle dafür danken, dass er der Verwendung dieses Materials zugestimmt hat. Notation und prinzipielle Vorgehensweise orientieren sich ebenfalls an der genannten Quelle und entsprechen der in der Mehrgittergruppe um Professor Dr. Ulrich Trottenberg über Jahre hinweg entwickelten formalen Darstellung von Mehrgitteralgorithmen.

Durch die angebotenen Inhalte soll neben fundierten Kenntnissen insbesondere die Einsicht wachsen, daß *viele der Standardmehrgitterkomponenten auch für komplexe Anwendungen hervorragende Ergebnisse liefern und selbst nicht-standard Ansätze erfolgreich mit der Mehrgitteridee kombinierbar sind.*

Dazu gibt diese Schrift neben der Darstellung der Prinzipien auch eine Beschreibung all der Komponenten, die für effiziente Mehrgitterverfahren und zur theoretischen Analyse der Verfahren erforderlich sind. Um den Rahmen einer Einführung nicht zu sprengen, wird bewußt nicht auf algebraische Mehrgitterverfahren und die aus vielfacher Sicht spannende Parallelisierung von Mehrgitterverfahren eingegangen. Dieses Umfeld und die praktische Erfahrung der Mehrgittergruppe des Instituts für Algorithmen und Wissenschaftliches Rechnen wird in [37] zusammengefasst.

Im Rahmen der erwähnten Kurse und im Rahmen meiner Lehrtätigkeit entwickelten sich diverse Materialien, die zu Lehr- und Lernzwecken in der Datei `v04_strfasfmg.zip` zusammengefasst sind, und von [http://fb03.h-bonn-rhein-sieg.de/mehrgitter\\_beispiel/](http://fb03.h-bonn-rhein-sieg.de/mehrgitter_beispiel/) heruntergeladen werden können. Darin spiegelt sich auch eine historische Entwicklung. Zu den ausgesprochenen Zielen der Kurse gehört von Anfang an, dass die Teilnehmer am Ende des Kurses ein lauffähiges Mehrgitterprogramm besitzen. Im Rahmen der Vorbereitungen gehörte die eigene Lösung dazu. So ist das im Anhang A beschriebene Fortran 77 Programm entstanden. Dem derzeitigen Arbeitsumfeld angepasst, entwickelte sich aus dem Fortran 77 Programm eine MATLAB<sup>1</sup>-Umgebung, die zum experimentellen Umgang mit einem Mehrgitterprogramm geeignet ist. Die aktuelle Version 04 mit allen erforderlichen Dateien wird im Anhang B besprochen und

---

<sup>1</sup>MATLAB<sup>®</sup> ist ein eingetragenes Warenzeichen von The MathWorks, Inc.

ist über obengenannte URL verfügbar.

Eine Fehlerfreiheit des zur Verfügung gestellten MATLAB-Programms kann nicht garantiert werden. So sind technische Voraussetzungen für lokale Verfeinerungen geschaffen, die Entwicklung für einen robusten und sicheren Einsatz aber noch nicht abgeschlossen. Irgendwelche Haftungsansprüche aufgrund der Benutzung der Software sind ausgeschlossen. Eine Weiterentwicklung auch in Form gemeinsamer Projekte ist in meinem Sinne.

DANKSAGUNGEN: Die Mehrgittergruppe im Institut für Algorithmen und Wissenschaftliches Rechnen (SCAI) der Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung (GMD), jetzt Fraunhofer SCAI, unter Leitung von Professor Dr. Ulrich Trottenberg war eines der deutschen Zentren mit Mehrgitterkompetenz. Nach einer anfänglichen Phase der Analyse von Modellproblemen wandte sich diese Gruppe sehr bald dedizierten Anwendungen zu und untersuchte später Fragestellungen der Parallelisierung von Mehrgitteralgorithmen. Diese kontinuierliche Arbeit hat Ergebnisse von fundamentaler Bedeutung geliefert. Die fruchtbaren Diskussionen mit den Kolleginnen und Kollegen dieser Gruppe haben die Darstellung und die Auswahl des Stoffs in positiver Weise beeinflusst, wofür ihnen allen Dank gebührt.

Im Zusammenhang mit diesem Buch und dem zugehörigen Material sind speziell zu nennen: M. Mocha (strfasfmg-Redesign, Mehrstellendiskretisierung, Dokumentation V02), D. Schmitz (Gauß-Seidel Blockrelaxationen, V03) sowie M. Mayer, J. Hermes und T. Jax (Redesign GUI für V04 unter MATLAB R2009b).

Die Wochenendkurse zu Zeiten meiner GMD- und Fraunhoferzugehörigkeit wären ohne den organisatorisch, zeitlich und physisch enormen Einsatz meiner Frau Karin und unseres Sohnes Markus nicht machbar gewesen. Die nun in der Hochschule Bonn-Rhein-Sieg durchgeführten Kurse werden organisatorisch nach wie vor von meiner Frau betreut, und das Kursumfeld ist nach wie vor *familiär*. Dafür allen Genannten meinen Dank, besonders aber meiner Frau Karin Dank und Respekt für das Geleistete.

Königswinter, im Januar 2011





# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Partielle Differentialgleichungen und Diskretisierungstechniken – Grundlagen</b>	<b>3</b>
2.1	Grundbegriffe . . . . .	3
2.2	Typeinteilung partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung .	7
2.3	Diskretisierungstechniken . . . . .	9
2.3.1	Die Idee des Ansatzes mit finiten Elementen . . . . .	9
2.3.2	Die Idee der Diskretisierung mit finiten Volumina . . . . .	12
2.3.3	Approximationen mit finiten Differenzen . . . . .	14
2.3.4	Differenzenformeln . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Stetige und diskrete Modellprobleme</b>	<b>21</b>
3.1	Modellprobleme und Diskretisierungen . . . . .	21
3.2	Grundlegende iterative Verfahren . . . . .	27
3.2.1	Praktische Konvergenzanalyse . . . . .	31
3.2.2	Konvergenzbetrachtungen für Gauß-Seidel- und Jakobi-Verfahren	36
3.2.3	Die Glättungseigenschaft von Gauß-Seidel- und Jakobi-Verfahren	39
<b>4</b>	<b>Das Mehrgitterprinzip</b>	<b>49</b>
4.1	Die Idee der Grobgitterkorrektur . . . . .	49
4.2	Das Mehrgitterkorrekturschema . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Standardkomponenten der Mehrgitterverfahrens</b>	<b>59</b>
5.1	Diskretisierung und Gitter . . . . .	59
5.2	Relaxation . . . . .	66
5.3	Vergrößerungsstrategie . . . . .	70

5.4	Grobgitteroperator . . . . .	72
5.5	Mehrgitterzyklus . . . . .	74
5.6	Restriktion . . . . .	78
5.7	Interpolation . . . . .	83
<b>6</b>	<b>Ausgewählte Modellprobleme</b>	<b>91</b>
<b>7</b>	<b>Mehrgitterverfahren für nichtlineare Probleme – das FAS Schema</b>	<b>99</b>
<b>8</b>	<b>Full Multigrid</b>	<b>105</b>
<b>9</b>	<b>Lokale Verfeinerungen im Mehrgitterverfahren</b>	<b>111</b>
9.1	Die Multi Level Adaptive Technik (MLAT) . . . . .	112
9.2	Der relative lokale Diskretisierungsfehler als Verfeinerungsmerkmal	116
<b>10</b>	<b>Mehrgitterverfahren für parabolische Anfangsrandwertaufgaben</b>	<b>119</b>
10.1	Die 1D-Diffusionsgleichung . . . . .	121
10.2	Die 2D-Diffusionsgleichung . . . . .	125
10.3	Allgemeine 2D-Probleme . . . . .	130
10.4	Mehrgitterverfahren je Zeitschritt . . . . .	131
<b>11</b>	<b>Systeme Partieller Differentialgleichungen</b>	<b>133</b>
<b>12</b>	<b>Hilfsmittel zur Effizienzanalyse</b>	<b>139</b>
12.1	Globale Zweigitteranalyse - Modellproblemanalyse . . . . .	140
<b>A</b>	<b>Beispielprogramm in FORTRAN</b>	<b>77</b>
<b>B</b>	<b>MATLAB MG Programm mit GUI</b>	<b>156</b>
B.1	Voraussetzungen . . . . .	157

B.2	Auswahlmöglichkeiten . . . . .	158
B.3	Parametergruppierungen des GUI . . . . .	159
B.4	Datenstruktur . . . . .	167
B.5	Funktionen . . . . .	169
B.5.1	Funktionen zum Erstellen oder Erweitern der Datenstruktur	169
B.5.2	Initialisieren von Gitterfunktionen . . . . .	170
B.5.3	Berechnen neuer Werte für Gitterfunktionen . . . . .	174
B.5.4	Bereitstellen von Strukturinformationen . . . . .	175
B.5.5	Gitterverfeinerung . . . . .	175
B.5.6	Kommunikation zwischen Patches . . . . .	177
B.5.7	Grafikausgabe . . . . .	178
B.6	Übergabeparameter für v04 strfasfmg . . . . .	183
B.7	Treiberprozedur . . . . .	184

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Hutfunktion auf einer vorgegebenen Triangulierung . . . . .	11
2.2	Erläuterung zum Ansatz mit finiten Volumina . . . . .	13
2.3	Numerische Ableitung von $\sin$ an der Stelle $x = 1$ . . . . .	15
3.1	Diskretisierung von $-\Delta u$ QUELLE: [20] . . . . .	23
3.2	Konvergenzhistorie der Residuen- und Fehlernorm QUELLE: [20] .	32
3.3	Zusammenfallen von 1D-Fourier-Frequenzen QUELLE: [20] . . . .	41
3.4	Konvergenzhistorie verschiedener Eingitterverfahren QUELLE: [20]	43
3.5	Konvergenzhistorie, Startapproximation aus gekoppelten Frequenzen QUELLE: [20] . . . . .	44
3.6	Startapproximation $\frac{1}{2} (\varphi_{2,2}^h + \varphi_{32,32}^h)$ . . . . .	45
3.7	Nach Relaxation 1 der Startapproximation $\frac{1}{2} (\varphi_{2,2}^h + \varphi_{32,32}^h)$ . . . .	45
3.8	Nach Relaxation 3 der Startapproximation $\frac{1}{2} (\varphi_{2,2}^h + \varphi_{32,32}^h)$ . . . .	46
3.9	Nach Relaxation 5 der Startapproximation $\frac{1}{2} (\varphi_{2,2}^h + \varphi_{32,32}^h)$ . . . .	46
3.10	Startapproximation $\frac{1}{2} (\varphi_{4,8}^h + \varphi_{16,32}^h)$ . . . . .	47
3.11	Nach Relaxation 1 der Startapproximation $\frac{1}{2} (\varphi_{4,8}^h + \varphi_{16,32}^h)$ . . . .	47
3.12	Nach Relaxation 3 der Startapproximation $\frac{1}{2} (\varphi_{4,8}^h + \varphi_{16,32}^h)$ . . . .	48
3.13	Nach Relaxation 5 der Startapproximation $\frac{1}{2} (\varphi_{4,8}^h + \varphi_{16,32}^h)$ . . . .	48
4.1	Restriktion (INJ) einer Feingitterfrequenz QUELLE: [20] . . . . .	51
4.2	Mehrgitterkonvergenz, Residuen- und Fehlerreduktion QUELLE: [20]	56
4.3	Mehrgitterkonvergenz, Residuen- und Fehlerreduktion . . . . .	57
5.1	Diskretisierungsgitter QUELLE: [20] . . . . .	60
5.2	Zur Shortley-Weller-Approximation QUELLE: [20] . . . . .	61
5.3	Zur Diskretisierung von Neumann-Randbedingungen QUELLE: [20]	62
5.4	Beschreibung einer typischen Geometrie der Prozeßsimulation mit gekrümmten Rand QUELLE: [20] . . . . .	64

5.5	Rechengebiet einschließlich der Hilfspunkte zur Diskretisierung der Normalenableitung auf $\partial\Omega_1$ bis $\partial\Omega_3$ QUELLE: [20] . . . . .	64
5.6	Diskretisierung der Normalenableitung auf einem gekrümmten Rand QUELLE: [20] . . . . .	65
5.7	Schemata zur Numerierung von Gitterpunkten QUELLE: [20] . . .	67
5.8	Generierung von $G_{2h}$ aus $G_h$ durch Standardvergrößerung QUELLE: [20] . . . . .	70
5.9	Generierung von $G_H$ aus $G_h$ durch Schachbrettvergrößerung QUELLE: [20] . . . . .	71
5.10	Generierung von $G_H$ aus $G_h$ durch SEMI-Vergrößerung in $y$ -Richtung QUELLE: [20] . . . . .	71
5.11	Zwei Schritte der alternierenden SEMI-Vergrößerung, ausgehend von $G_{(h,h)}$ QUELLE: [20] . . . . .	72
5.12	Zur Herleitung der Galerkin-Darstellung des Grobgitteroperators .	75
5.13	Die Struktur der V- und W-Zyklen QUELLE: [20] . . . . .	75
5.14	Konvergenzvergleich verschiedener Zyklustypen . . . . .	76
5.15	Schematische Darstellung des Full Weighting QUELLE: [20] . . . .	79
5.16	In Randnähe modifiziertes Full Weighting QUELLE: [20] . . . . .	82
5.17	Schematische Darstellung der bilinearen Interpolation QUELLE: [20]	84
5.18	Monotone interpolation QUELLE: [20] . . . . .	87
5.19	Experimente mit unterschiedlichen Interpolationen . . . . .	88
8.1	Struktur des FMG-Zyklus - Nested Iteration QUELLE: [20] . . . .	106
8.2	Mehrgitter- und FMG-Konvergenz, $h = \frac{1}{256}$ QUELLE: [20] . . . .	110
9.1	Verfeinerte Gitter zusammengesetzt aus rechteckigen Verfeinerungsgebieten QUELLE: [20] . . . . .	112
9.2	Beispiel eines zusammengesetzten Gitters QUELLE: [20] . . . . .	113
9.3	Interpolation durch Randleaxation QUELLE: [20] . . . . .	115
10.1	Verhalten der numerischen Verfahren bei variierenden Schrittweiten	120
10.2	Prinzipielle Darstellung der beschriebenen Zeitschemata . . . . .	124

10.3	Aufbau des diskreten Problems für den Zeitpunkt $t^{n+1}$ QUELLE: [20]	132
B.1	Das Fenster des MG GUI . . . . .	157
B.2	Ausgabe im MATLAB-Arbeitsfenster . . . . .	161
B.3	Konvergenzraten und Zeiten für Berechnungen auf globalen Gittern	161
B.4	Lösung des Viertelkreisproblems (extremer Sprung) auf globalen Gittern . . . . .	162
B.5	Fehler des Viertelkreisproblems (extremer Sprung) auf globalen Gittern . . . . .	163
B.6	Residuum nach Schachbrettrelaxation . . . . .	163
B.7	Residuum nach even-odd Linienrelaxation . . . . .	164
B.8	Fehler des Problems <b>exponential bell</b> nach zehn Zyklen . . . .	164
B.9	Lösung des Viertelkreisproblems auf einem verfeinerten Gitter . .	166
B.10	Aus rechteckigen Verfeinerungsgebieten zusammengesetztes Gitter für das Viertelkreisproblem . . . . .	166

# Tabellenverzeichnis

1.1	Ein Vergleich von Rechenverfahren zur Lösung der diskreten Poissonsgleichung . . . . .	1
3.1	Fehler- und Defektreduktion für ein Modellproblem QUELLE: [20]	35
5.1	Entwicklungskoeffizienten von $I_{2h}^h \varphi_{l,m}^{2h}$ QUELLE: [20] . . . . .	90
6.1	Komponenten eines Mehrgitterverfahrens für ein isotropes Modellproblem . . . . .	91
6.2	Asymptotische Fehler- und Defektreduktion für ein Modellproblem QUELLE: [20] . . . . .	92
6.3	Dämpfung hochfrequenter Komponenten, Standardvergrößerung QUELLE: [20] . . . . .	95
6.4	Empirische Konvergenzraten für das anisotrope Modellproblem QUELLE: [20] . . . . .	96
12.1	Zweigitterraten für das Modellproblem, gewichtete Jakobi-Relaxation, FW QUELLE: [20] . . . . .	143
12.2	Glättungsfaktoren $\mu^*(\nu), \nu = 1$ bei unterschiedlichen Vergrößerungsstrategien QUELLE: [20] . . . . .	146

Notation

Dieser Abschnitt fat die im Text verwendeten Abkürzungen und Bezeichnungen zusammen und gibt bei Bedarf zusätzliche Erläuterungen. Zur Vereinfachung wird sooft es möglich ist, auf eine extrem formale Schreibweise verzichtet - insbesondere dann, wenn die aktuelle Bedeutung aus dem Zusammenhang erkennbar ist. Zum Beispiel: häufig wird  $N$  verwendet, um die Zahl der Teilintervalle gleicher Länge anzugeben, in die das Einheitsintervall unterteilt wird.  $N$  liefert so die Maschenweite  $h = 1/N$  und daraus abgeleitet die Zahl der Gitterpunkte hinsichtlich der Raumdiskretisierung. In analoger Weise ist  $N_t$ , die Zahl der Zeitschritte, zu interpretieren. Andererseits wird in den Beispielen aus der Prozeßsimulation die Dotierstoffkonzentration mit  $N = N(x, y, t)$  bezeichnet. Die jeweilige Bedeutung ergibt sich so aus dem Zusammenhang.

Diskrete Gren werden mit Hilfe der allgemeinen Koordinate  $x$  und dem formalen Diskretisierungsparameter  $\Delta x$  (oder  $\Delta X$ , um gröbere Diskretisierungen zu bezeichnen) definiert.  $\Delta x$  ist somit durch gängige Parameter wie  $h, \Delta t, H, 2h, \Delta T, \dots$  zu ersetzen. Dementsprechend stehen  $L_{\Delta x}$  oder  $u_{\Delta x}$  für Angaben wie  $L_h, L_H, L_{\Delta t}$  beziehungsweise  $u_h, \dots$

Gleichungen, Tabellen und Abbildungen werden mit der Kapitelnummer als erster Quantifizierung verwendet. Die Gleichung (2.4) kann damit im Kapitel zwei als vierte Gleichung gefunden werden. Abbildung (1.7) weist dementsprechend auf die siebte Abbildung des ersten Kapitels hin.

Notation	Erläuterung
$\Omega, \overline{\Omega}$	Ein Gebiet und sein Abschluß
$\Omega_t$	Zeitgebiet, Zeitintervall
$\partial\Omega, \partial\Omega_i$	Rand des Gebiets, Randsegmente
$L$	Differentialoperator
$A$	Differentialoperator, der nur Ortsableitungen enthält
$B$	Differentialoperator für Randbedingungen
$\vec{n} = (n_x, n_y)$	äußerer Normaleneinheitsvektor
$\frac{\partial}{\partial \vec{n}}$	Richtungsableitung in die Richtung von $\vec{n}$
$f, g, u$	stetige Funktionen (rechte Seiten, Lösung des kontinuierlichen Problems)
$N(x, y, t)$	Konzentration im Punkt $(x, y)$ zur Zeit $t \geq 0$
$D(N)$	Konzentrationsabhängiger Diffusionskoeffizient



Notation	Erläuterung
$\mathcal{H}$	Eine Indexmenge aus Maschenweiten; zum Beispiel $\mathcal{H} = \{h_l   h_l = h_1/2^{l-1}, l = 1, \dots, M\}$ . Anstelle der Indizierung mit $h_l$ wird häufig nur mit dem Gitterindex $l$ indiziert
$\frac{h}{2}, h, 2h, H$ $\frac{\Delta t}{2}, \Delta t, 2\Delta t, \Delta T$	Maschenweiten, Schrittweiten bei Ortsdiskretisierungen Zeitschrittweiten, Maschenweite des Zeitgitters; $\Delta t^n$ bezeichnet die Schrittweite des n-ten Zeitschritts: $t^n = t^{n-1} + \Delta t^n$ für $n \in \mathbb{N}$
$N_x, N_y, N_t$	Zahl der Gitterintervalle in x- bzw. y-Richtung; Zahl der Zeitschritte
$\mathcal{G}_h$	Unendliches Gitter der Maschenweite $h$ ; die Punkte werden mit $(x_i, y_j)$ bezeichnet
$G_h$	Die Menge der Gitterpunkte zur Diskretisierung mit dem Parameter $h$ , analog mit $2h, H, l, \dots$ und ebenso für Randdiskretisierungen
$G_{\mathcal{H}}$	Zusammengesetztes Gitter
$f_{i,j}, (f)_{\Delta x}$	Auswertung von $f(x, y)$ im Punkt $(x_i, y_j)$ ; Injektion auf das $\Delta x$ -Gitter
$f_{\Delta x}$	Gitterfunktion auf dem $\Delta x$ -Gitter
$\ f_{\Delta x}\ _{\infty}, \ f_{\Delta x}\ _2$	Diskrete Maximum- und $L_2$ -Norm
$N_{\Delta x}^{n+1}$	Gitterfunktion $N_{\Delta x}$ zur Zeit $t^{n+1} := t^n + \Delta t^{n+1}$
$Id_{\Delta x}$	Identitäts(gitter)operator auf dem $\Delta x$ -Gitter
$I_{\Delta X}^{\Delta x}, \hat{I}_{\Delta X}^{\Delta x}$	Prolongations-, Interpolationsoperatoren vom $\Delta X$ -Gitter auf das $\Delta x$ -Gitter
$\mathbb{I}_{\Delta X}^{\Delta x}$	FMG - Interpolation vom $\Delta X$ -Gitter auf das $\Delta x$ -Gitter
$I_{\Delta x}^{\Delta X}, \hat{I}_{\Delta x}^{\Delta X}, I^{\Delta x}, \hat{I}^{\Delta x}$	Restriktionsoperatoren vom $\Delta x$ -Gitter auf das $\Delta X$ -Gitter bzw. vom Kontinuum auf das $\Delta x$ -Gitter
$F_{\Delta x}^{\Delta X}$	Full-Weighting - eine spezielle gewichtete Restriktion
$\lambda, \lambda_{l,m}, \lambda^h, \lambda_{l,m}^h$	Eigenwerte
$\varphi_{l,m}, \varphi_{l,m}^h$	Eigenfunktionen
$\rho(M)$	Spektralradius des Operators M, asymptotischer Konvergenzradius
$\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{D}, \mathbf{L}, \mathbf{P}, \mathbf{U}, \dots$	Matrizen, Operatoren
$\mathbf{f}, \mathbf{u}, \mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{u}^{(n+1)}, \dots$	Vektoren
$M_{\Delta x}^{\Delta X}, M_{\Delta x}, \mathcal{S}_{\Delta x}$	Zweigitter-, Mehrgitter- und Glättungsoperator
$r_{\Delta x}, r_{\Delta x}^{(n)}$	Residuum auf dem $\Delta x$ -Gitter (nach n Iterationen)
$e_{\Delta x}$	Globaler Fehler $e_{\Delta x} = (u)_{\Delta x} - u_{\Delta x}$ zwischen der kontinuierlichen Lösung $u$ von $Lu = f$ (ausgewertet auf dem $\Delta x$ -Gitter) und der exakten Lösung $u_{\Delta x}$ von $L_{\Delta x} u_{\Delta x} = f_{\Delta x}$

Notation	Erläuterung
$\tau_{\Delta x}, \tau_{\Delta X}^{\Delta x}$	Lokaler Diskretisierungsfehler des $\Delta x$ -Gitters und der relative lokale Diskretisierungsfehler des $\Delta X$ -Gitters bezüglich des $\Delta x$ -Gitters
$\tilde{e}_{\Delta x}^{(n)}$	Algebraischer Fehler $\tilde{e}_{\Delta x}^{(n)} = u_{\Delta x} - w_{\Delta x}^{(n)}$ zwischen $u_{\Delta x}$ und einer Approximation $w_{\Delta x}^{(n)}$ nach $n$ Iterationen
$\nu = \nu_1 + \nu_2$	Gesamtzahl der Relaxationsschritte ( $\nu_1$ Pre-Smoothing, $\nu_2$ Post-Smoothing)
$\nu_{sol}$	Zahl der Relaxationsschritte (Iterationen) zur approximativen Lösung auf dem größten Gitter
$\mu(h, \theta)$	Verstärkungsfaktor für die Fourierkomponente mit der Frequenz $\theta$ auf dem $h$ -Gitter
$\tilde{\mu}(h)$	Glättungsrate als Funktion der Schrittweite
$\mu_{PGS-lex}^*$	$h$ -unabhängige Glättungsrate eines Relaxationsverfahrens, hier PGS-lex
$RE$	Relaxationseinheit, Maß für den numerischen Aufwand
$W_l$	Numerischer Aufwand pro Zyklus eines Mehrgitterverfahrens mit $l$ Gitterebenen
$\rho_{n+1}$	Defektreduktion im $n + 1$ -ten Iterationsschritt. Mit dem Residuum $r_{\Delta x}^{(n)}$ nach $n$ Iterationen ist die Defektreduktion im $n + 1$ -ten Iterationsschritt bezüglich einer vorgegebenen Norm gegeben durch $\rho_{n+1} = \  r_{\Delta x}^{(n+1)} \  / \  r_{\Delta x}^{(n)} \ $ Eine durchschnittliche empirische Konvergenzrate kann bestimmt werden, indem die Defektreduktion der Iterationen $N_1$ bis $N_2$ ( $N_2 > N_1$ ) gemittelt wird: $\rho_{av} = \left( \prod_{i=N_1}^{i=N_2} \rho_i \right)^{\frac{1}{N_2 - N_1 + 1}}$
	Um den extremen Einfluß der Anfangsphase auszuschalten, wird in der Regel $N_1 \geq 3$ gewählt
lex, ch, eo, oe	Angabe der Bearbeitungsreihenfolge von Gitterpunkten oder -linien: lexikographisch, schachbrettartig (chequer-boarded), ZEBRA (even-odd, odd-even)
$\delta_{kl}$	Kroneckersymbol
$dist(z, S)$	$\inf_{w \in S} \  z - w \ $ mit der Euklidischen Distanz $\  \cdot \ $
$f(x) = O(g(x))$	Laudausches Symbol: $\  \frac{f(x)}{g(x)} \ _{\infty} < const.$ für $x \rightarrow x_0$ und $\  x - x_0 \ _{\infty}$ hinreichend klein
$f(x) = o(g(x))$	Laudausches Symbol: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$	Die Mengen der natürlichen, ganzen und reellen Zahlen