Berichte aus der Steuerungs- und Regelungstechnik

Klaus Röbenack

Beitrag zur Analyse von Deskriptorsystemen

Shaker Verlag
Aachen 1999

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Röbenack, Klaus:
Beitrag zur Analyse von Deskriptorsystemen / Klaus Röbenack.
- Als Ms. gedr. - Aachen : Shaker, 1999
(Berichte aus der Steuerungs- und Regelungstechnik)
Zugl.: Dresden, Techn. Univ., Diss., 1999
ISBN 3-8265-6795-1

ISBN 3-8265-6795-1
ISSN 0945-1005

Shaker Verlag GmbH • Postfach 1290 • 52013 Aachen
Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9
Internet: www.shaker.de • eMail: info@shaker.de

Kapitel 5

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurden lineare zeitinvariante Deskriptorsysteme der Form

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

untersucht. Besonderes Interesse galt dabei dem Erkennen struktureller Eigenschaften und der Untersuchung ihres Einflusses auf das Übertragungsverhalten bzw. auf symbolische und numerische Verfahren der Regelungstechnik. Es wurden sowohl reguläre als auch singuläre Deskriptorsysteme betrachtet.

Kapitel 2 ist der strukturellen Analyse von Deskriptorsystem gewidmet. Die theoretische Grundlage bildet die von WEIERSTRASS und KRONECKER Mitte des letzten Jahrhunderts entwickelte Theorie der Scharen bilinearer Formen, die im heutigen Sprachgebrauch als Theorie der Matrizenscharen bezeichnet wird. Die verwendeten Begriffe wurden im Abschnitt 2.1 erklärt. Für die Untersuchung struktureller Eigenschaften kommen methodische Werkzeuge der Graphentheorie zum Einsatz. Der wesentliche Bezugspunkt ist die graphentheoretische Determinanteninterpretation von CAUCHY-COATES (Abschnitt 2.2).

Der Abschnitt 2.3 befaßt sich mit der Bestimmung der Jordan-Block-Struktur einer beliebigen Matrizenschar $[E, A]$ unter Zuhilfenahme des zugehörigen Digraphen $\mathcal{G}([E], [A])$. Anzahl und Dimension der Jordan-Blöcke der charakteristischen Nullstellen bei Null bzw. der charakteristischen Nullstellen im Unendlichen konnten graphentheoretisch interpretiert werden (Satz 2.2). Der Beweis dieses Satzes beruht auf dem Elementarteilersatz von WEIERSTRASS und der graphentheoretischen Darstellung von Determinantenteilern. Der Spezialfall einer regulären Matrizenschar bzw. die Bestimmung der Jordan-Block-Struktur einer einzelnen Matrix wurden separat diskutiert.

Die Verbindung zu regelungstechnischen Problemstellungen wurde im Abschnitt 2.4 geknüpft. Dabei standen reguläre Matrizenscharen $sE - A$ bzw. die zugehörigen regulären Deskriptorsysteme im Vordergrund. Die Anwendung der im Abschnitt 2.3 bewiesenen Aussagen ermöglicht die Bestimmung der Dimensionen des schnellen bzw. langsamen Teilsystems sowie der Dimension des Impulsunterraumes. Beim Erkennen bzw. Vermeiden von Überidealisierungen in der Modellbildung kommt der Berechnung des strukturellen Index eine besondere Bedeutung zu. Die vorgestellten Berechnungsverfahren wurden im Abschnitt 2.4.2 an verschiedenen Beispielen demonstriert.

Zur Untersuchung von Steuerbarkeitseigenschaften war die stets singuläre Matrizenschar

$$(sE - A, B)$$

zu betrachten. Bei Deskriptorsystemen wird — im Gegensatz zu Zustandsgleichungssystemen — zwischen verschiedenen Steuerbarkeitsarten unterschieden. Die Impulssteuerbarkeit findet in der Literatur besondere Beachtung. Abschnitt 2.4.3 wendet sich ausschließlich der Impulssteuerbarkeit zu. Satz 2.3 liefert eine graphentheoretische Interpretation für die Dimension des impulssteuerbaren Unterraumes. Außerdem gibt der Satz 2.4 ein Kriterium für die strukturelle Impulssteuerbarkeit an.

Gegenstand des Kapitels 3 ist die Untersuchung des Übertragungsverhaltens singulärer Deskriptorsystems mittels graphentheoretischer Methoden. Dabei werden sowohl Digraphen als auch bipartite Graphen betrachtet. Das Konzept verallgemeinerter Inverser erweist sich für die Analyse singulärer Deskriptorsysteme als besonders nützlich. Die matrizentheoretischen Grundlagen werden im Kapitel 3.1 erläutert.

Das Eingangs-Ausgangs-Verhalten regulärer Deskriptorsysteme läßt sich durch Übertragungsfunktionsmatrizen beschreiben. Die Anwendbarkeit dieser Systembeschreibung auf singuläre Deskriptorsysteme wurde im Abschnitt 3.2 untersucht. Eine wesentliche Grundlage bildete dabei der von M. Hou vorgeschlagene Ansatz verallgemeinerter Übertragungsfunktionen. Im Abschnitt 3.2.1 wurde gezeigt, daß sich die verallgemeinerten Übertragungsfunktionen

$$T(s) := C\,(sE - A)^{[q]}\,B \qquad (q \in \mathbb{N}_0) \tag{5.1}$$

aus den Digraphen $\mathcal{G}\,(E, A)$ und $\mathcal{G}\,(E, A, B, C)$ ablesen lassen (Satz 3.3 und Bemerkung 3.1). Mit dem so erhaltenem Streckenmodell können zahlreiche, sich auf die Übertragungsfunktion beziehende Verfahren zum Reglerentwurf eingesetzt werden.

Der Abschnitt 3.2.2 behandelt die regelungstechnisch relevanten Zusammenhänge zwischen verallgemeinerten Übertragungsfunktionen und dem regulären Teil eines Deskriptorsystems (z. B. Satz 3.4). Das Phänomen der gleichzeitigen Existenz mehrerer verschiedener Übertragungsfunktionen für ein und dasselbe Deskriptorsystem wurde bezüglich mathematischer und regelungstheoretischer Gesichtspunkte analysiert. Satz 3.5 gibt hinreichende Bedingungen für die Eindeutigkeit des Übertragungsverhalten an.

Abschnitt 3.3 befaßt sich mit Modellmodifikationen bei singulären Deskriptorsystemen. Dazu werden im Abschnitt 3.3.1 Maßnahmen vorgeschlagen, die die Lösbarkeit des Deskriptorsystems für beliebige Eingangssignale sichern, ohne dabei die Matrizenschar $sE - A$ zu verändern. In einem ersten Entwurfsschritt ist dabei parallel zur Eingangsmatrix B eine rationale Korrekturmatrix $\mathcal{Q}(s)$ einzufügen. Satz 3.6 liefert eine Ableseregel, mit der sich diese Korrekturmatrix aus dem Digraphen $\mathcal{G}\,(E, A, B, C)$ bestimmen läßt. Der Beweis stützt sich auf die im Kapitel 3.1 definierte Klasse $(sE - A)^{[q]}$ von verallgemeinerten Inversen.

Um die Korrekturmatrix $\mathcal{Q}(s)$ nutzen zu können, ist ein Eingriff in die innere Struktur des Deskriptorsystems erforderlich. Das ist nicht immer sinnvoll und bei Simulationsprogrammen in der Regel auch nicht möglich. Deshalb befaßt sich ein zweiter Entwurfsschritt mit der Berechnung eines Filters $\mathcal{F}(s)$, welches vor dem Eingang des Deskriptorsystems anzuordnen ist. Ein solches Filter ist bedeutend leichter als $\mathcal{Q}(s)$ zu implementieren.

Bedingungen für die Existenz von $\mathcal{F}(s)$ und Regeln zur Dimensionierung wurden an Beispielen erörtert.

Abschnitt 3.3.2 behandelt die Regularisierung von singulären Deskriptorsystemen, indem die Matrizen E und A um zusätzliche Einträge ergänzt werden. Dieser Zugang führt auf verallgemeinerte Inverse mit maximalem Rang (Lemma 3.2) bzw. auf reflexive verallgemeinerte Inverse (Lemma 3.3). Die Sätze 3.7 und 3.8 geben eine graphentheoretische Interpretation der zugehörigen verallgemeinerten Übertragungsfunktionen an.

Die Drazin-Inverse ist insbesondere durch die Verbreitung des Umgangs mit Deskriptormodellen bekannt geworden. Im Abschnitt 3.4 wurden verschiedene Möglichkeiten zur Berechnung der Drazin-Inversen untersucht. Es stellte sich heraus, daß man nur bestimmte Elemente der Drazin-Inversen anschaulich graphentheoretisch deuten kann. Unter geeigneten Voraussetzungen läßt sich auch die verallgemeinerte Übertragungsfunktion

$$C\,(sE-A)^D\,B$$

aus den Digraphen $\mathcal{G}\,(E,A)$ und $\mathcal{G}\,(E,A,B,C)$ ablesen.

Die bisherigen graphentheoretischen Betrachtungen bezogen sich ausschließlich auf Digraphen. Besonders effiziente Algorithmen stehen dagegen vorrangig für bipartite Graphen (Bigraphen) zur Verfügung. Die Einsatzmöglichkeiten bipartiter Graphen bei der Analyse singulärer Deskriptorsysteme wurden im Abschnitt 3.5 diskutiert. Dem Konzept der Zyklenfamilien steht dann das Konzept der Paarungen (Matchings) gegenüber. In Anlehnung an die Abschnitte 3.2.1 und 3.3.2 konnten im Abschnitt 3.5.2 zwei verallgemeinerte Inverse definiert werden, die unmittelbar aus dem zugehörigen Bigraphen ablesbar sind. Damit lassen sich auch die zugehörigen verallgemeinerten Übertragungsfunktionen aus den Bigraphen $\mathcal{B}\,(E,A)$ und $\mathcal{B}\,(E,A,B,C)$ ermitteln (Satz 3.11). Außerdem wurde ein Verfahren angegeben, mit dem für schwach besetzte Matrizen das Besetzungschema einer Basis für den Kern generiert werden kann.

Abschnitt 3.5.3 beschäftigt sich mit algorithmischen Aspekten beim Umgang mit bipartiten Graphen. Der Schwerpunkt lag bei der qualitativen Analyse des Übertragungsverhaltens. Zusätzlich wurden die Index-Reduktion einer Matrix mittels Zeilenpermutationen und die Regularisierung singulärer Deskriptorsysteme unter Beibehaltung des Übertragungsverhaltens erörtert.

Kapitel 4 befaßt sich mit dem Einfluß der Kronecker-Struktur singulärer Matrizenscharen auf analytische und numerische Eigenschaften von verallgemeinerten Inversen. In den Abschnitten 4.1 und 4.2 wurden die Polstellen bei $\mu = 0$ untersucht, die in den Elementen der rationalen Matrizen

$$(E-\mu A)^+, \quad (E-\mu A)^+E, \quad (E-\mu A)^D E, \quad (E-\mu A)^D E$$

auftreten. Die Vielfachheiten dieser Polstellen haben einen entscheidenden Einfluß auf die Konvergenz numerischer Integrationsverfahren. Im Falle der Moore-Penrose-Pseudoinversen wurde ein eineindeutiger Zusammenhang zwischen der maximalen Vielfachheit von Polstellen bei $\mu = 0$ und dem Index nachgewiesen. Die Moore-Penrose-Pseudoinverse verhält sich dabei genauso wie die Inverse einer regulären Matrizenschar. Dieses Resultat wurde in den Sätzen 4.2 und 4.3 dokumentiert. Der Beweis stützt sich auf die analytische Singulärwertzerlegung bzw. die Nutzung einer Quasi-Kronecker-Normalform.

An verschiedenen Beispielen wurde demonstriert, daß bei der Drazin-Inversen keine eindeutige Zuordnung zwischen dem Index und der maximalen Vielfachheit von Polstellen möglich ist. Vielmehr ist bei der Drazin-Inversen nur eine Abschätzung der Vielfachheiten möglich, wobei nicht nur der Index, sondern auch die rechten bzw. linken Kronecker-Indizes einzubeziehen sind. Die in den Sätzen 4.4 und 4.5 getroffenen Abschätzungen lassen sich ohne zusätzliche Voraussetzungen nicht verbessern.

Der aus numerischer Sicht wichtigen Vielfachheit von Polstellen steht bei regelungstechnischen Betrachtungen der Gradüberschuß zwischen Zählen- und Nennerpolynom verallgemeinerter Übertragungsfunktionen gegenüber. Im Satz 4.7 aus Abschnitt 4.3 wird dieser Gradüberschuß für die Elemente der Übertragungsfunktionsmatrizen (5.1) nach oben abgeschätzt. Für Beobachter- und Reglerentwurf, aber auch in Hinblick auf minimale Realisierungen der Regelstrecke werden verallgemeinerte Übertragungsfunktionen mit möglichst geringem Gradüberschuß gesucht. Innerhalb der durch (5.1) definierten Klasse erweist sich die auch graphentheoretisch am leichtesten zu interpretierende Übertragungsfunktion $C(sE-A)^{[0]}B$ als besonders vorteilhaft (Satz 4.8).

Schließlich wurden im Abschnitt 4.4 die aus der Literatur bekannten Zusammenhänge zwischen dem Index einer regulären Matrizenschar und dem Index einer einzelnen Matrix für die Anwendung auf singuläre Matrizscharen verallgemeinert. Satz 4.9 legt den Einfluß der Kronecker-Struktur von (E, A) auf den Index der quadratischen Matrix

$$(sE-A)^D E$$

offen.