

Numerisch-mechanische Betrachtung des Entwurfsprozesses von Membrantragwerken

Johannes Linhard

Technische Universität München
Fakultät Bauingenieur- und Vermessungswesen

Lehrstuhl für Statik
Univ.-Prof. Dr.-Ing. Kai-Uwe Bletzinger
Arcisstr. 21
80333 München

Tel.: (+49 89) 289 - 22422

Fax: (+49 89) 289 - 22421

<http://www.st.bv.tum.de>

Schriftenreihe des Lehrstuhls für Statik TU München

Band 9

Johannes Linhard

**Numerisch-mechanische Betrachtung des
Entwurfsprozesses von Membrantragwerken**

Shaker Verlag
Aachen 2010

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Zugl.: München, Techn. Univ., Diss., 2009

Copyright Shaker Verlag 2010

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8322-9262-1

ISSN 1860-1022

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen

Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9

Internet: www.shaker.de • E-Mail: info@shaker.de

**Lehrstuhl für Statik
der Technischen Universität München**

Numerisch-mechanische Betrachtung des Entwurfsprozesses von Membrantragwerken

Johannes Linhard

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Ernst Rank

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Kai-Uwe Bletzinger
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing., Dr.-Ing. habil.
Gerhard H. Müller
3. Univ. Lecturer Dr. Fehmi Cirak,
University of Cambridge / UK

Die Dissertation wurde am 03.02.2009 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen am 14.04.2009 angenommen.

Numerisch-mechanische Betrachtung des Entwurfsprozesses von Membrantragwerken

Zusammenfassung. In der vorliegenden Arbeit wird der Entwurfsprozess von Membrantragwerken aus der Sichtweise der numerischen Mechanik analysiert. Die dabei durchzuführenden Planungsschritte, die sich aufgrund des speziellen Tragverhaltens vorgespannter, leichter Flächentragwerke von denen konventioneller Bauten unterscheiden, werden zunächst getrennt voneinander auf ihre kontinuumsmechanische Problemstellung und die daraus abzuleitenden numerischen Lösungsverfahren hin untersucht. Im Anschluss daran werden gegenseitige Interaktionen zwischen den einzelnen Phasen aufgezeigt, durch deren Berücksichtigung sich ein integraler, numerisch gestützter Entwurfsprozess mit einem Zugewinn an Modellgenauigkeit entwickeln lässt.

Da Membrankonstruktionen wegen ihrer extremen Schlankheit äußere Lasten nahezu ausschließlich über tangential Zugspannungen abtragen, muss zu Beginn des Entwurfsprozesses eine geeignete Geometrie gefunden werden, die sowohl den mechanischen als auch architektonischen Anforderungen genügt. Dies geschieht im Zuge der *Formfindung*, bei der für Spannungsvorgaben in den Strukturelementen die korrespondierende Gleichgewichtsform unter Einhaltung gewisser Randbedingungen ermittelt wird. Eine robuste numerische Lösung dieses inversen Problems gelingt durch die vorgestellte Erweiterung der Updated Reference Strategy, bei der sowohl die Instabilitäten infolge der diskretisierten Flächenbeschreibung mittels finiter Elemente als auch generell auftretende physikalische Inkompatibilitäten bei den Spannungsvorgaben gelöst werden.

Die Herstellungsweise der räumlichen Membrantragwerke aus ebenen Werkstoffbahnen macht eine *Zuschnittsermittlung* erforderlich, bei der die Auswirkungen infolge der generellen Nichtabwickelbarkeit der Membranfläche zu minimieren sind. Nach theoretischen Überlegungen zur qualitativen Verteilung der Zusatzspannungen infolge der doppelten Verkrümmung der Membranbahnen, wird ein Zuschnittsalgorithmus beschrieben, der durch Verbindung einer kontinuumsmechanisch korrekten Beschreibung des Deformationsprozesses mit Optimierungsmethoden eine Minimierung der Spannungsabweichung bewirkt. Das beschriebene Verfahren ist in der Lage, beliebige Vorspannzustände und Materialeigenschaften zu berücksichtigen.

Bei der abschließenden Beschreibung der *Strukturanalyse* von Membrantragwerken wird der Schwerpunkt auf eine integrale Betrachtungsweise gelegt. Durch Kombination der numerischen Methoden zur statischen Berechnung von Membranen mit Elementen der Formfindung lassen sich Aufbauprozesse von vorgespannten Konstruktionen simulieren. Der Einfluss des Zuschnitts auf das Strukturverhalten kann berücksichtigt werden, indem die zugeschnittenen, spannungsfreien Membranbahnen anstatt der vorgespannten, zusammengebauten Geometrie als Referenzkonfiguration für eine geometrisch nichtlineare Berechnung verwendet wird. Der Erfolg der beschriebenen Methoden wird jeweils an illustrativen Beispielen demonstriert.

Computational mechanics of the design process of membrane structures

Abstract. This thesis investigates the design process of membrane structures from a computational mechanics point of view. In a first step, the respective design phases, which significantly differ from those for conventional structures due to the special structural behaviour of membranes, are analysed concerning their definition of the physical problem and its consequences for a numerical solution process. Thereafter, mutual interactions between the individual phases are pointed out leading to the development of an integrated, numerical design process with increased accuracy of the calculations.

Due to the slenderness of membrane structures, external loads have to be carried almost completely by tensile forces in tangential directions. Therefore, an adequate geometry has to be found at the beginning of the design process, which satisfies mechanical as well as architectural requirements. In the so called *form finding procedure*, the equilibrium shape for a given stress state and boundary conditions is determined. A robust numerical solution of this inverse problem is achieved by the proposed extension of the Updated Reference Strategy, which successfully deals with the instabilities due to the discretized geometrical representation with finite elements as well as with physically incompatible given stress states.

The manufacturing of spatially curved membrane structures out of plane material panels necessitates a *cutting pattern generation*, in which the negative effects due to a general non-developability of the membrane surface have to be minimised. After theoretical considerations regarding the qualitative distribution of additional stresses due to two-directional curvature changes of the plane membrane panels, an algorithm for cutting pattern generation is presented, which minimises the stress deviation by combining a continuum mechanically correct description of the actual deformation process with optimisation methods. The proposed method is capable of including the effects of arbitrary prestress states and material properties of the membrane.

In the concluding description of *structural analysis methods* for membrane structures, the main focus is on an integrated approach. By combining numerical methods for static analysis of membranes with form finding procedures, simulations of assembling processes become possible. The effects of cutting patterns on the structural behaviour can be investigated by defining

the stress-free, plane membrane panels as reference configuration for a geometrically nonlinear calculation instead of the prestressed, curved surface of the assembled structure. The success of the proposed methods is demonstrated with illustrative examples.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 2005 bis 2009 während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl für Statik der Technischen Universität München.

Meinen besonderen Dank möchte ich meinem Doktorvater, Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. Kai-Uwe Bletzinger, aussprechen, der mir als Lehrstuhlinhaber ein äußerst angenehmes und produktives Arbeitsumfeld ermöglichte. Nicht nur stand er mir in unzähligen Diskussionen als äußerst kompetenter und begeisterungsfähiger Gesprächspartner zur Verfügung, sondern gleichzeitig gewährte er mir genügend Freiheit, eigene Ideen ausprobieren zu dürfen. Durch dieses entgegengebrachte Vertrauen ist ein Großteil dieser Arbeit erst möglich geworden.

Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing., Dr.-Ing. habil. Gerhard H. Müller und Herrn Univ. Lecturer Dr. Fehmi Cirak danke ich herzlich für ihr Interesse an der Arbeit und für die Übernahme der Koreferate. Ebenso danke ich Herrn Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Ernst Rank für die bereitwillige Übernahme der Leitung der Prüfungskommission.

In besonders guter Erinnerung werde ich die kollegiale und freundschaftliche Atmosphäre behalten, die am Lehrstuhl für Statik zwischen den Mitarbeitern herrschte. Besonders hervorheben möchte ich hierbei Florian Jurecka, André Lähr und Roland Wüchner, die mir entweder als Zimmernachbarn und/oder durch die enge wissenschaftliche Zusammenarbeit stets wertvolle Ansprechpartner waren.

Bei meinen Eltern Ingrid und Helmut möchte ich mich für ihre stete Unterstützung und Inspiration auf meinem bisherigen Lebensweg bedanken, wodurch sie in entscheidender Weise zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Ganz besonderer Dank gebührt jedoch meiner lieben Frau Diana: Denn sie zeigte mir stets, dass es außerhalb der Welt der Membranen durchaus noch eine andere, nicht minder lebenswerte Welt gibt. Dazu bin ich ihr zu größtem Dank verpflichtet.

München, im April 2009

Johannes Linhard

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Zielsetzung und Überblick	3
2	Geometrische und mechanische Beschreibung	9
2.1	Modellbildung	9
2.2	Differentialgeometrie von Flächen im Raum	11
2.2.1	Flächenbeschreibung	12
2.2.2	Erste Fundamentalform – Metrik der Fläche	17
2.2.3	Zweite Fundamentalform – Krümmung der Fläche	20
2.2.4	Diskret. Flächenbeschreibung mittels finiter Elemente	25
2.3	Kontinuumsmechanik	33
2.3.1	Konfigurationen	34
2.3.2	Spannungs- und Dehnungsmaße	38
2.3.3	Materialmodellierung	49
2.3.4	Gleichgewichtsbeziehungen	59
3	Formfindung	69
3.1	Was ist Formfindung?	69
3.1.1	Definition der Formfindung	71
3.1.2	Experimentelle und numerische Formfindung	74
3.2	Diskussion der physikalischen Problemstellung	77
3.2.1	Membran mit isotroper Vorspannung	77

3.2.2	Membran mit anisotroper Vorspannung	85
3.2.3	Mit Seilen kombinierte Membran	96
3.2.4	Seilnetze	102
3.3	Numerische Formfindung	107
3.3.1	Diskretisierung des Originalproblems	107
3.3.2	URS: Stabilisierung des numerischen Problems	112
3.3.3	Spannungsadaption: Stabilisierung des phys. Problems .	124
4	Zuschnitt	143
4.1	Problemstellung und Ablauf der Zuschnittsberechnung	143
4.2	Spannungsabweichungen infolge des Zuschnitts	147
4.3	Numerische Ermittlung der Schnittlinien	153
4.3.1	Schnittebenen	154
4.3.2	Geodätische Linien	155
4.4	Zuschnitt durch Verebnen	161
4.5	Zuschnitt durch „Inverse engineering“	167
4.5.1	Kleinste Fehlerquadrate	169
4.5.2	Minimierung der „Arbeit der Spannungsabweichung“ .	180
4.6	Vergleich der Zuschnittsmethoden	186
5	Strukturanalyse	195
5.1	Überblick	196
5.2	Elementformulierungen	197
5.2.1	Membranelement	198
5.2.2	Seilelement	200
5.3	Kombination Formfindung - Strukturanalyse	201
5.3.1	Membran mit Seilschlaufe	201
5.3.2	Bat-Sail	202

5.3.3	Tensegrity	204
5.3.4	Unterspannte Membranstruktur	206
5.4	Kombination Zuschnitt - Strukturanalyse	208
5.4.1	Bat-Sail	210
5.4.2	Pneumatisch vorgespanntes Folienkissen	213
6	Zusammenfassung und Ausblick	221
	Literaturverzeichnis	225
	Anhang	239
A.1	Richtungsprojektion zwischen Flächen	239
A.2	Geometrische Beschreibung von Rotationsflächen	241

Abbildungsverzeichnis

1.1	Entwurfsprozess von Membrantragwerken	5
2.1	Modellbildung einer Membran	11
2.2	Ortsvektor eines Punktes im Raum	13
2.3	Explizite und implizite Flächenbeschreibung	14
2.4	Parameterdarstellung einer Fläche	15
2.5	Ko- und Kontravariante Basisvektoren	16
2.6	Erste Fundamentalform einer Fläche	18
2.7	Möglichkeiten der Krümmungsberechnung	21
2.8	Flächenkategorien	23
2.9	Gaußsche Krümmungen eines Torus	24
2.10	Topologie eines drei- und vierknotigen finiten Elements	26
2.11	Lage und Wichtung der Gaußpunkte zur num. Integration	28
2.12	Kotennormalen bei finiten Elementen	30
2.13	Wichtungsfaktoren bei Mittelung des Knotendirektors	31
2.14	Kontinuumsmechanische Konfigurationen	35
2.15	Konfigurationen einer Membranstruktur	37
2.16	Polare Dekomposition der Deformation	41
2.17	Komponenten des Spannungsvektors	44
2.18	Membranspannungszustand und dessen Hauptspannungen	45
2.19	Kontinuumsmechanische Spannungsmaße	47
2.20	Kraft-Streckungs-Kurve eines St. Venant-Kirchhoff-Materials	52
2.21	Multilineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung	57

2.22	Berstversuch eines ETFE-Folienkissens	58
2.23	Realität und Modellbildung der Krafteinleitung	60
2.24	Gleichgewicht der Membran senkrecht zur Fläche	61
3.1	Faltenbildung bei einer gescherten Membran	70
3.2	Definition der Formfindung	72
3.3	Experimentelle Formfindung	74
3.4	Numerische Formfindung des Tanzbrunnens von Frei Otto . . .	76
3.5	Costasche Minimalfläche	80
3.6	Relatives Flächenminimum der Costaschen Minimalfläche . . .	81
3.7	Beispiele für Minimalflächen	82
3.8	cmc-Variationen eines Katenoids	84
3.9	Orthogonalitätsbedingung der anisotropen Vorspannung	86
3.10	Projektionsschema: Untersuchung der Eindeutigkeit	87
3.11	Projektionsschema: Orthogonalisierung der Richtungen	89
3.12	Rotationssymmetrische Struktur mit anisotroper Vorspannung .	90
3.13	Stabile rotationssym. Formen mit anisotroper Vorspannung . .	94
3.14	Spannungsabweichung bei einem anisotrop vorgesp. Katenoid	95
3.15	Kombinationen Membran - Seil	96
3.16	Formfindung: Membran mit Randseil	99
3.17	Formfindung: Membran mit Augseil	100
3.18	Formfindung: Membran mit elastischem Augseil	101
3.19	Seilnetztypen	103
3.20	Vergleich Membran - Seilnetz an einem Katenoid	104
3.21	Numerische Formfindung eines Katenoids	105
3.22	Seilnetze mit konstanter Vorspannung	106
3.23	Schwimmende Netze bei numerischer Formfindung	109

3.24	Singuläre Steifigkeiten bei direkter numerischer Formfindung . . .	111
3.25	Formfindung der Scherkschen Minimalfläche mittels URS . . .	114
3.26	Lineares Seilelement	117
3.27	Formfindung von Seilnetzen mittels der Kraftdichtemethode . .	121
3.28	Numerische Seifenblasen	125
3.29	Zerplatzen eines überkritischen Katenoids	128
3.30	Ablaufdiagramm: Formfindung mit Spannungsadaption	130
3.31	Konfigurationen der Formfindung mit Spannungsadaption . . .	132
3.32	Formfindung eines Katenoids mit Spannungsadaption	136
3.33	Testbeispiel für Verzerrungskontrolle	137
3.34	Verzerrungskontrolle bei einer „punktgestützten“ Membran . .	139
3.35	Netzanpassung mittels Verzerrungskontrolle	140
3.36	Beispiele für die Formfindung von Membrantragwerken	141
4.1	Zuschnitt eines Vierpunktsegels	144
4.2	Konfigurationen der Zuschnittsermittlung	146
4.3	Verebnung nicht-abwickelbarer Flächen	148
4.4	Faltenbildung infolge des Zuschnitts am physikalischen Modell	149
4.5	Faktoren der Spannungsabweichung infolge des Zuschnitts . .	151
4.6	„Papstzelt“: Spannungsabweichungen infolge des Zuschnitts .	152
4.7	Einfluss der Schnittliniendefinition auf den Zuschnitt	154
4.8	Neuvernetzung nach vertikalen Schnitten	155
4.9	Beispiele geodätischer Linien	156
4.10	Algorithmen zur Bestimmung diskreter geodätischer Linien . .	157
4.11	Berechnung der Entfernungsfunktion T der FMM	158
4.12	Berechnungsergebnisse der geodätischen Entfernung	159
4.13	Geodätische Linien durch vorgespannte Seile	160

4.14	Zuschnitt durch Verebnen	163
4.15	Ergebnisse bei Verebnung eines vorgespannten Seiles	166
4.16	Zuschnitt durch „Inverse engineering“	169
4.17	Variation der Referenzgeometrie bei orthotropen Geweben . . .	173
4.18	Cauchy-Spannung in Abhängigkeit der Seilzuschnittslänge . . .	178
4.19	Stationäre Punkte bei Optimierung des Seilzuschnitts	179
4.20	Maßgebliche Funktionen der inversen Zuschnittsberechnung .	182
4.21	Unsymmetrische Systemmatrix bei Zuschnittsermittlung	184
4.22	Vergleich der Zuschnittsvarianten an einer Minimalfläche	187
4.23	Vergleich der inversen Zuschnittsvarianten	189
4.24	Konfigurationen eines Sechspunktsegels	190
4.25	Einfluss der Materialeigenschaften auf den Zuschnitt	191
5.1	Formfindung einer Membran mit Seilschleife	202
5.2	Schematische Skizze einer Fledermaus	203
5.3	Formfindung eines Bat-Sails	204
5.4	Formfindung von Tensegrity-Strukturen	206
5.5	Formfindung einer unterspannten Membranstruktur	207
5.6	Statische Analyse eines Bat-Sails	211
5.7	Entwurfsprozess eines pneumatischen Folienkissens	214
5.8	Einfluss des Zuschnitts bei statischer Analyse eines Pneus . . .	217
A.1	Basisvektoren bei Richtungsprojektion	241
A.2	Geometrie einer Rotationsfläche	242
A.3	Hauptkrümmungen einer Rotationsfläche	243