



**3D hygromechanische Modellierung von Rissbildung  
in Verbindung mit Feuchtetransport in  
Betonstrukturen auf Basis der  
*Extended Finite Element Method***

Von der Fakultät für Bau- und Umweltingenieurwissenschaften  
der Ruhr-Universität Bochum zur Erlangung  
des Grades Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.) genehmigte

**Dissertation**

von

**Dipl.-Ing. Stefan Jox**

Lehrstuhl für Statik und Dynamik  
Institut für konstruktiven Ingenieurbau  
Ruhr-Universität Bochum  
Januar 2009



Schriftenreihe des Instituts für Konstruktiven Ingenieurbau

Herausgeber:  
Geschäftsführender Direktor des  
Instituts für Konstruktiven Ingenieurbau  
Ruhr-Universität Bochum

Heft 2009-4

**Stefan Jox**

**3D hygromechanische Modellierung von Rissbildung  
in Verbindung mit Feuchtetransport  
in Betonstrukturen auf Basis der  
*Extended Finite Element Method***

Shaker Verlag  
Aachen 2009

**Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Zugl.: Bochum, Univ., Diss., 2008

Copyright Shaker Verlag 2009

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8322-8374-2

ISSN 1614-4384

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen

Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9

Internet: [www.shaker.de](http://www.shaker.de) • E-Mail: [info@shaker.de](mailto:info@shaker.de)

---

## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 2002-2008 im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Statik und Dynamik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der Fakultät für Bau- und Umweltingenieurwissenschaften als Dissertation angenommen.

Herrn Prof. Dr. techn. Günther Meschke gilt mein besonderer Dank für die Anregung zu dieser Arbeit, deren wissenschaftliche Betreuung sowie die wertvollen Hinweise und Diskussionen, die zum Gelingen der vorliegenden Arbeit beitrugen. Ferner bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr. rer. nat. Klaus Hackl für das Interesse an meiner Arbeit und die Übernahme des Korreferats.

Bei allen Kolleginnen und Kollegen des Lehrstuhls für Statik und Dynamik bedanke ich mich für ihre Hilfsbereitschaft, die freundschaftlichen Kontakte und die gute Zusammenarbeit.

Ohne die unermüdliche Unterstützung meiner Familie wäre der erfolgreiche Abschluss dieser Dissertation nicht möglich gewesen. Daher gilt ein großer Dank meinen Eltern, die mir stets einen unverzichtbaren Rückhalt gegeben haben.

Bochum, im Januar 2009

Stefan Jox

Referenten: Prof. Dr. techn. Günther Meschke  
Lehrstuhl für Statik und Dynamik  
Ruhr-Universität Bochum

Prof. Dr. rer. nat. Klaus Hackl  
Lehrstuhl für Allgemeine Mechanik  
Ruhr-Universität Bochum

Tag der Einreichung: 8. Juli 2008  
Tag der mündlichen Prüfung: 27. November 2008

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation . . . . .	1
1.2	Zielsetzung . . . . .	4
1.3	Aufbau und Gliederung der Arbeit . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Hygromechanische Modellierung zementgebundener Materialien</b>	<b>7</b>
2.1	Materialmodelle für ungesättigte zementgebundene Materialien . . . . .	7
2.1.1	Modellierung von kohäsiven Rissen . . . . .	8
2.1.2	Kohäsive Risse: Traktions-Verschiebungs-Beziehung . . . . .	9
2.2	Materialmodellierung für teilgesättigte zementgebundene Materialien . . . . .	12
2.2.1	Modelle zur Beschreibung teilgesättigter poröser Materialien . . . . .	12
2.2.2	Einführung eines makroskopischen Kapillardrucks . . . . .	14
2.2.3	Mischungstheorie . . . . .	14
2.2.4	Identifikation der poroelastischen Kopplungskoeffizienten . . . . .	16
2.2.5	Kapillardruck-Sättigungs-Beziehung . . . . .	17
2.2.6	Elastische effektive Spannungen . . . . .	17
2.2.7	Massenbilanz . . . . .	18
2.2.8	Identifikation der Dissipation und der Transportgesetze . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Modellierung von Feuchtetransport</b>	<b>21</b>
3.1	Feuchtetransport in zementgebundenen Materialien . . . . .	21
3.2	Motivation: Feuchteaufnahme in gerissenen, porösen Medien . . . . .	22
3.3	Feuchtetransportgesetz . . . . .	22

---

<b>4</b>	<b>Finite Elemente in Raum und Zeit</b>	<b>27</b>
4.1	Strategie zur Numerischen Umsetzung . . . . .	27
4.2	Zeitdiskretisierung . . . . .	28
4.3	Linearisierung . . . . .	29
4.4	Räumliche Diskretisierung . . . . .	30
4.4.1	Gebietszerlegung in Finite Elemente . . . . .	30
4.4.2	Hierarchische räumliche 3D-p-FEM . . . . .	31
4.4.3	Räumlich anisotrope Approximation . . . . .	32
4.4.4	Feldweise Approximation der Variablen . . . . .	33
4.4.5	Anisotrope Approximation der Feldgrößen . . . . .	34
4.4.6	Assemblierung zum Strukturgleichungssystem . . . . .	35
4.4.7	Vektor der inneren Kräfte . . . . .	35
4.4.8	Tangentiale Steifigkeitsmatrix . . . . .	35
4.5	Assemblierung zur Gesamtstruktur und iterative Lösung der Systemgleichung	35
4.6	Gekoppeltes hygromechanisches Anfangsrandwertproblems . . . . .	36
4.6.1	Randwertproblem der Festkörpermechanik . . . . .	36
4.6.2	Anfangsrandwertproblem der Potentialströmung . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Rissmodellierung im Rahmen der X-FEM</b>	<b>41</b>
5.1	Numerische Modelle zur Rissmodellierung . . . . .	41
5.2	Extended Finite Element Method (X-FEM) . . . . .	42
5.2.1	<i>Partition of Unity</i> Konzept . . . . .	43
5.2.2	Kinematik diskontinuierlicher Verschiebungsfelder . . . . .	44
5.2.3	Prinzip der virtuellen Verschiebungen . . . . .	45
5.2.4	3D X-FEM Modellierung . . . . .	46
5.2.5	Numerische Integration . . . . .	47
5.3	Knotenerweiterungskonzept . . . . .	49
5.4	Beschreibung der Risstopologie . . . . .	51
5.5	Rissfortschritt . . . . .	51
5.5.1	Rissfortschrittskriterien bei 2D Analysen . . . . .	51
5.5.2	Rissfortschrittskriterien bei 3D Analysen . . . . .	53
5.5.3	Elementsteifigkeitsbeziehung . . . . .	54
5.6	3D-Simulationsplattform . . . . .	55

<b>6</b>	<b>Hygromechanisches X-FEM-Modell: Eingebettete Formulierung</b>	<b>57</b>
6.1	Finite Elemente Modelle . . . . .	57
6.1.1	Kontinuumsbasierte Modellierung . . . . .	57
6.1.2	Eingebettete Modellierung . . . . .	59
6.1.3	Diskrete Modellierung . . . . .	59
6.2	X-FEM Modelle zur hygromechanischen Modellierung von Feuchtetransport	60
6.3	Eingebettete und erweiterte Berücksichtigung des Feuchtetransportes im Risskanal . . . . .	60
6.3.1	Schwache Form des Anfangsrandwertproblems . . . . .	61
6.3.2	Hygrische virtuelle Arbeit: Risskanal . . . . .	62
6.4	Diskretisierung unter Berücksichtigung des Risskanales . . . . .	62
6.4.1	Numerische Integration . . . . .	63
6.4.2	A priori vorgegeben Risskanaltopologie . . . . .	64
6.4.3	Generierung von Risskanalflächen in Finiten Elementen . . . . .	64
6.4.4	Kopplung mit dem Verschiebungsfeld . . . . .	65
6.5	Räumliche und zeitliche Diskretisierung des Gesamtproblems . . . . .	65
6.5.1	Berücksichtigung kohäsiver Risse . . . . .	66
6.5.2	Vektor der inneren Kräfte . . . . .	67
<b>7</b>	<b>Hygromechanisches X-FEM-Modell: Erweiterte Formulierung</b>	<b>69</b>
7.1	Übersicht . . . . .	69
7.2	Diskontinuierliches Kapillardruckfeld . . . . .	70
7.3	Fluidfluss im Risskanal und Austausch mit dem Kontinuum . . . . .	72
7.3.1	Erweitertes Variationsprinzip . . . . .	73
7.3.2	Lokale Massenbilanz . . . . .	73
7.3.3	Approximation des Kapillardruckfeldes . . . . .	76
7.4	Distanzfunktion - Level-Set-Methode . . . . .	79
7.4.1	Algorithmus zur Berechnung der Knotenwerte der Distanzfunktion .	82
7.5	Diskretisierung der Interfacekraft . . . . .	84
7.6	Numerische Umsetzung - Systemgleichung . . . . .	85
7.6.1	Vektoren der inneren Kräfte nach räumlicher und zeitlicher Diskre- tisierung . . . . .	87
7.6.2	Steifigkeitsmatrizen nach räumlicher und zeitlicher Diskretisierung .	88

---

<b>8 Numerische Beispiele</b>	<b>91</b>
8.1 Gerissene L-förmige Scheibe . . . . .	91
8.2 Balken unter hygromechanischer Belastung . . . . .	97
8.3 Erweiterung des Kapillardruckfeldes . . . . .	101
8.3.1 Implementierung und numerische Simulation . . . . .	101
8.3.2 Numerische Stabilität . . . . .	101
8.3.3 Ergebnisse und Nachlaufrechnung . . . . .	102
<b>9 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>103</b>
9.1 Zusammenfassung . . . . .	103
9.2 Ausblick . . . . .	105
<b>A Transformation zwischen globalen und lokalen Koordinatensystemen</b>	<b>107</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>109</b>