



**Modellierung und numerische Simulation
von Rissfortschritt
in spröden und quasi-spröden Materialien
auf Basis der *Extended Finite Element Method***

Von der Fakultät für Bauingenieurwesen
der Ruhr-Universität Bochum zur Erlangung
des Grades Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.) genehmigte

Dissertation

von

Peter Dumstorff

Lehrstuhl für Statik und Dynamik
Institut für Konstruktiven Ingenieurbau
Ruhr-Universität Bochum
Oktober 2006

Schriftenreihe des Instituts für Konstruktiven Ingenieurbau

Herausgeber:
Geschäftsführender Direktor des
Instituts für Konstruktiven Ingenieurbau
Ruhr-Universität Bochum

Heft 2009-3

Peter Dumstorff

**Modellierung und numerische Simulation
von Rissfortschritt
in spröden und quasi-spröden Materialien
auf Basis der Extended Finite Element Method**

Shaker Verlag
Aachen 2009

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Zugl.: Bochum, Univ., Diss., 2005

Copyright Shaker Verlag 2009

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8322-8280-6

ISSN 1614-4384

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen

Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9

Internet: www.shaker.de • E-Mail: info@shaker.de

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 2000–2005 während meiner Tätigkeit am Institut für Statik und Dynamik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der Fakultät für Bauingenieurwesen als Dissertation angenommen.

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denjenigen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. techn. G. Meschke für die Anregung und die wissenschaftliche Betreuung meiner Arbeit. Herrn Prof. Dr. rer. nat. K. Hackl danke ich für die freundliche Übernahme des Koreferates und für das Interesse an der vorliegenden Arbeit.

Weiterhin danke ich allen Kolleginnen und Kollegen am Lehrstuhl für Statik und Dynamik für die freundschaftliche Unterstützung und die gute Zusammenarbeit. Einige dieser Kollegen sind im Laufe meiner Tätigkeit zu guten Freunden geworden, zu denen ich auch nach Abschluss meiner Tätigkeit am Lehrstuhl Kontakt halten werde.

Schließlich danke ich meiner Familie – insbesondere meiner Lebensgefährtin Eva Heimeshoff – für die Unterstützung und das Verständnis in den vergangenen Jahren.

Bochum, im Dezember 2005

Peter Dumstorff

Tag der Einreichung: 25.10.2005

Tag der mündlichen Prüfung: 22.12.2005

1. Gutachter: Prof. Dr. techn. G. Meschke

2. Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. K. Hackl

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	vii
1 Einleitung	1
1.1 Motivation und Stand der Forschung	2
1.2 Zielsetzung	8
1.3 Aufbau der Arbeit	9
2 Kontinuumsmechanische Grundlagen	11
2.1 Kinematik	11
2.1.1 Konfiguration, Lage, Deformation	12
2.1.2 Deformationsgradient	12
2.1.3 GREEN-LAGRANGE-Dehnungstensor	13
2.2 Definition von Spannungen	14
2.2.1 Spannungsvektoren	14
2.2.2 Spannungstensoren	16
2.3 Bilanz- und Erhaltungssätze	17
2.3.1 Massenerhaltungssatz	17
2.3.2 Impulserhaltungssatz	18
2.3.3 Drehimpulserhaltungssatz	19
2.4 Arbeits- und Energieprinzipien	19
2.4.1 Prinzip der virtuellen Verschiebungen	19
2.4.2 Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials	21
2.4.3 Linearisierung	22
2.4.4 Vereinfachungen durch Beschränkung auf geometrische Linearität	22

3	Grundlagen diskontinuierlicher Verschiebungsfelder	25
3.1	Kinematik diskontinuierlicher Verschiebungsfelder	25
3.1.1	Verschiebungsvektor	25
3.1.2	Deformationsgradient	27
3.1.3	GREEN-LAGRANGE-Dehnungstensor	28
3.2	Definition von Spannungen an internen Flächen	28
3.2.1	Spannungsvektoren	28
3.2.2	Spannungstensoren	30
3.3	Arbeits- und Energieprinzipien	30
3.3.1	Prinzip der virtuellen Verschiebungen	30
3.3.2	Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials	31
3.3.3	Linearisierung	32
3.3.4	Vereinfachungen durch Beschränkung auf geometrische Linearität	33
4	Materialmodelle	35
4.1	Einleitung	35
4.2	Kontinuumsmodelle	38
4.2.1	Hyperelastisches ST. VENANT-KIRCHHOFF-Materialmodell	38
4.2.2	Verzerrungsbasiertes isotropes Kontinuumsmodell	39
4.3	Traktions-Verschiebungsbeziehungen	42
4.3.1	Anisotropes Schädigungsmodell	42
4.3.2	Arbeitsäquivalentes Schädigungsmodell	45
4.3.3	Anisotropes Plastizitätsmodell	49
5	Extended Finite Element Method	55
5.1	Klassische Finite Elemente Diskretisierung	55
5.1.1	Elementierung	55
5.1.2	Verfeinerungskonzepte	56
5.1.3	Eindimensionale Ansatzfunktionen	57
5.1.4	Elementtypen	62
5.1.5	Approximation der Feldgrößen	64
5.2	Erweiterte Finite Elemente Diskretisierung	64
5.2.1	<i>Partition of Unity</i> Konzept	65
5.2.2	Modellbeispiel	67
5.2.3	Erweiterungsfunktionen	70

5.2.4	Erweiterte Approximation der Feldgrößen	77
5.3	Diskretisierung des Prinzips der Virtuellen Verschiebungen	82
6	Simulation fortschreitender Risse	89
6.1	Rissinitiierung	90
6.1.1	Bruchmechanische Rissinitiierungskriterien	90
6.1.2	Lokalisierungsanalyse	92
6.2	Rissfortschritt im Rahmen der Linear Elastischen Bruchmechanik	92
6.2.1	Konzept der Spannungsintensitätsfaktoren	93
6.2.2	Globales Energiekriterium	98
6.3	Rissfortschritt im Rahmen des Kohäsivzonenmodells	105
6.3.1	Rissfortschrittskriterien	105
6.3.2	Rissrichtungskriterien	107
7	Numerische Umsetzung	113
7.1	Numerische Integration	113
7.1.1	DELAUNAY-Triangularisierung	114
7.2	Freiheitsgradverwaltung in MSC.MARC	115
7.3	Berechnungsalgorithmus	117
7.3.1	Berechnungsalgorithmus der klassischen Kriterien	117
7.3.2	Berechnungsalgorithmus des globalen Energiekriteriums	118
8	Numerische Beispiele	119
8.1	Linear Elastische Bruchmechanik	120
8.1.1	Modellbeispiel	121
8.1.2	Eingekerbter Balken	122
8.1.3	L-förmige Scheibe	125
8.1.4	Vier-Punkt-Biegebalken	129
8.1.5	Bewertung der Ergebnisse	132
8.2	Vergleich der Richtungskriterien	132
8.2.1	Eingekerbter Balken	133
8.2.2	L-förmige Scheibe	136
8.2.3	Beidseitig eingekerbte Scheibe	138
8.2.4	Bewertung der Ergebnisse	139
8.3	Vergleich der Traktions-Verschiebungsbeziehungen	141

8.3.1	L-förmige Scheibe	142
8.3.2	Beidseitig eingekerbte Scheibe	144
8.3.3	Bewertung der Ergebnisse	146
8.4	Globales Energiekriterium	146
8.4.1	Eingekerbter Balken	147
8.4.2	L-förmige Scheibe	148
8.4.3	Beidseitig eingekerbte Scheibe	151
8.4.4	Bewertung der Ergebnisse	154
8.5	Große Deformationen	155
8.5.1	Kragarm	155
8.5.2	Stabilität	158
8.5.3	Bewertung der Ergebnisse	160
9	Zusammenfassung und Ausblick	161
9.1	Zusammenfassung	161
9.2	Bewertung der Ergebnisse	163
9.3	Ausblick	164
	Literaturverzeichnis	165

Verzeichnis häufig verwendeter Symbole

Mathematik

\min	Minimum
\max	Maximum
\in	Element von
\cap	Schnittmenge
\cup	Vereinigungsmenge
\forall	Für alle
$(\bullet) $	Für die gilt
\wedge	Und
\vee	Oder
\emptyset	Leere Menge

Tensoralgebra

\mathbf{A}^T	Transponierter Tensor
\mathbf{A}^{-1}	Inverser Tensor
\mathbf{A}^{-T}	Inverser, transponierter Tensor
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	Skalarprodukt zweier Vektoren
$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	Kreuzprodukt zweier Vektoren
$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$	Einfache Überschiebung zweier Tensoren
$\mathbf{A} : \mathbf{B}$	Doppelte Überschiebung zweier Tensoren
$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$	Dyadisches Produkt zweier Tensoren
\mathbf{I}	Einheitstensor zweiter Stufe
\mathbb{I}	Einheitstensor vierter Stufe
$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{B}}$	Partielle Ableitung eines Tensors \mathbf{A} nach einem Tensor \mathbf{B}

Operatoren

$\nabla(\bullet)$	Materieller Gradient
$\nabla^{\text{sym}}(\bullet)$	Symmetrischer Anteil des materiellen Gradienten
Div	Materielle Divergenzbildung
$\frac{D}{Dt} = (\dot{\bullet})$	Materielle Zeitableitung
δ	Variation einer Größe
Δ	Inkrement bzw. GÂTEAUX-Ableitung einer Größe
tr	Spur ($\text{tr}\mathbf{A} = \mathbf{A} : \mathbf{I}$)
det	Determinante
L	Linearisierung

Kontinuumsmechanik

$(\bullet)_0$	Variable in der Referenzkonfiguration
$(\bullet)_t$	Variable in der Momentankonfiguration
$\partial\Omega_0, \partial\Omega_t$	Rand eines Körpers in der Referenz- und der Momentankonfiguration
$\partial_\sigma\Omega_0, \partial_\sigma\Omega_t$	Rand eines Körpers in der Referenz- und der Momentankonfiguration an dem Kraftgrößenrandbedingungen vorgeschrieben werden
dA, da	Materielles und räumliches Flächenelement
dV, dv	Materielles und räumliches Volumenelement
dX, dx	Materielles und räumliches Linienelement
e_1, e_2, e_3	Basisvektoren eines orthonormierten, rechtshändigen Koordinatensystems
e	ALMANSI-Dehnungstensor
E	GREEN-LAGRANGE-Dehnungstensor
f	Gravitationsbeschleunigung
F	Deformationsgradient
i	Impuls eines Körpers
J	Jakobideterminante
l	Drehimpuls eines Körpers
M, m	Masse eines Körpers
N, n	Einheitsnormalenvektor zu einer Schnittfläche in der Referenz- und der Momentankonfiguration
N^*, n^*	Normalenvektor zur Berandungsfläche eines Körpers in der Referenz- und der Momentankonfiguration
p_a	Summe der Oberflächenkräfte
p_v	Summe der volumenhaft angreifenden Kräfte
P	Erster PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor
S	Zweiter PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor
t, t_0	Aktuelle Zeit, Referenzzeitpunkt
t	Schnittspannungsvektor
t^*	Oberflächendruck
T	Pseudoschnittspannungsvektor
T^*	Pseudooberflächendruck
u	Verschiebungsvektor
W	Energiedichtefunktion
x_i	Ortskoordinaten bezüglich eines orthonormierten, rechtshändigen Koordinatensystems in der Momentankonfiguration
x	Ortsvektor der Momentankonfiguration
X_i	Ortskoordinaten bezüglich eines orthonormierten, rechtshändigen Koordinatensystems in der Referenzkonfiguration
X	Ortsvektor der Referenzkonfiguration
ε	Lineares Dehnungsmaß
Π	Gesamtpotential

Π_{int}	Inneres Potential
Π_{ext}	Äußeres Potential
ρ_0, ρ_t	Dichte in der Referenz- und der Momentankonfiguration
φ, φ^{-1}	Deformationsabbildungsvorschrift und deren Inverse
$\boldsymbol{\sigma}$	CAUCHY-Spannungstensor
Ω_0, Ω_t	Körper in der Referenz- und der Momentankonfiguration

Diskontinuierliche Verschiebungsfelder

$[\bullet]$	Sprung einer Größe
$\partial_s \Omega_0$	Interne Fläche in der Referenzkonfiguration
$\partial_s^+ \Omega_t, \partial_s^+ \Omega_t$	Interne Fläche in der Momentankonfiguration
$\partial_s^* \Omega_t$	Mittelfläche zwischen $\partial_s^+ \Omega_t$ und $\partial_s^+ \Omega_t$ in der Momentankonfiguration
D	Transformationstensor
\bar{E}	Regulärer Anteil des GREEN-LAGRANGE-Dehnungstensors
\bar{F}	Regulärer Anteil des Deformationsgradienten
H_s	HEAVISIDE-Funktion an der internen Fläche
\mathbf{n}_i^*	Lokale orthonormierte Rissbasis in der Momentankonfiguration
$\mathbf{n}_s^+, \mathbf{n}_s^-$	Normalenvektoren an der internen Fläche in der Momentankonfiguration
N_s	Normalenvektor an der internen Fläche in der Referenzkonfiguration
S_s	Signum-Funktion an der internen Fläche
\mathbf{t}_s	Auf die Fläche $\partial_s^* \Omega_t$ bezogener Traktionsspannungsvektor
\mathbf{t}_s^+	Auf die Fläche $\partial_s^+ \Omega_t$ bezogener Traktionsspannungsvektor
\mathbf{t}_s^-	Auf die Fläche $\partial_s^- \Omega_t$ bezogener Traktionsspannungsvektor
\bar{T}_s	Pseudotraktionsspannungsvektor
$\bar{\mathbf{u}}$	C^0 -stetiger Anteil des Verschiebungsfeldes
$\hat{\mathbf{u}}$	Diskontinuierlicher Anteil des Verschiebungsfeldes
$\hat{\mathbf{u}}$	C^0 -stetiger Anteil des Verschiebungsfeldes
$[[\mathbf{u}]]$	Verschiebungssprung
\bar{W}	Regulärer Anteil der Energiedichtefunktion
W^s	Amplitude des singulären Anteils der Energiedichtefunktion
\mathbf{X}^+	Ortsvektor eines Punktes in Ω^+
\mathbf{X}^-	Ortsvektor eines Punktes in Ω^-
\mathbf{X}_s	Ortsvektor eines Punktes auf $\partial_s \Omega$
$\bar{\epsilon}$	Regulärer Anteil des linearen Dehnungsmaßes
δ_s	Dirac-Delta Verteilung an der internen Fläche
Ω_0^+, Ω_0^-	Durch die interne Fläche $\partial_s \Omega$ getrennte Bereiche von Ω in der Referenzkonfiguration
Ω_t^+, Ω_t^-	Durch die interne Fläche $\partial_s \Omega$ getrennte Bereiche von Ω in der Momentankonfiguration

Materialgesetze

a_0, a_1	Parameter des Kontinuumschädigungsmodells
a_0, a_k	Parameter der Traktions-Verschiebungsbeziehung (Plastizitätsmodell)
\mathbf{A}	Hilftensor im Rahmen des Plastizitätsmodells
$\mathbf{A}^{uu}, \mathbf{A}^{u\alpha},$ $\mathbf{A}^{\alpha u}, \mathbf{A}^{\alpha\alpha}$	Untertensoren von \mathbf{A}
\mathbb{C}	Steifigkeitstensor eines ungeschädigten Materials
\mathbb{C}^{da}	Schädigungsnachgiebigkeitstensor
\mathbb{C}^{t}	Steifigkeitstensor
\mathbb{C}^{tan}	Tangentialer Steifigkeitstensor
d	Schädigungsvariable
E	Elastizitätsmodul
\tilde{E}^{eq}	Äquivalente Verzerrung
\tilde{E}^i	Eigenwerte des Tensors der äquivalenten Verzerrung
E_E, E_u, E_t	Bereiche des elastischen Materialverhaltens
f_c	Maximale Druckfestigkeit
f_{tu}	Maximale Zugfestigkeit
g	Potentialfunktion
G_f	Bruchenergie
h	Potentialfunktion
h_s	Parameter der Traktions-Verschiebungsbeziehung (Schädigungsmodell)
\mathbb{H}	Hardeningtensor
q	Spannungsähnliche interne Variable
q_s, q_n	Komponenten des Vektors der spannungsähnlichen internen Variablen
\mathbf{q}	Vektor der spannungsähnlichen internen Variablen
\mathbf{R}	Vektor der Residuen
$\mathbf{R}^u, \mathbf{R}^\alpha$	Untervektoren des Vektors der Residuen \mathbf{R}
t^{eq}	Äquivalente Traktionsspannung
t_n, t_s	Komponenten des Traktionsspannungsvektors
$T_{11}^{\text{da}}, T_{22}^{\text{da}}$	Komponenten des Schädigungssteifigkeitstensors
T_{22}^{k}	Parameter der Traktions-Verschiebungsbeziehung (Schädigungsmodell)
T^{da}	Skalarwertige Schädigungsnachgiebigkeit
\mathbb{T}	(Traktions)-Steifigkeitstensor eines ungeschädigten Materials
\mathbb{T}^{da}	Schädigungsnachgiebigkeitstensor
\mathbb{T}^{pl}	Plastizitätssteifigkeitstensor
\mathbb{T}^{t}	Steifigkeitstensor
\mathbb{T}^{tan}	Tangentialer Steifigkeitstensor
\mathbb{T}^{geo}	Geometrischer Steifigkeitstensor
$[\mathbf{u}]_n, [\mathbf{u}]_s$	Komponenten des Verschiebungssprungs
$[\mathbf{u}]^{\text{el}}$	Elastischer Anteil des Verschiebungssprungs
$[\mathbf{u}]^{\text{pl}}$	Plastischer Anteil des Verschiebungssprungs
$[\mathbf{u}]^{\text{eq}}$	Äquivalenter Verschiebungssprung

α	Verzerrungsähnliche interne Variable
α_0	Initialer Wert der verzerrungsähnlichen internen Variablen
α_s, α_n	Komponenten des Vektors der verzerrungsähnlichen internen Variablen
α_k	Parameter der Traktions-Verschiebungsbeziehung (Schädigungsmodell)
$\boldsymbol{\alpha}$	Vektor der verzerrungsähnlichen internen Variablen
β	Parameter der Traktions-Verschiebungsbeziehung (Schädigungsmodell)
$\dot{\gamma}$	LAGRANGE-Multiplikator
λ, μ	LAMÉ-Konstanten
ν	Querkontraktion
ϕ	Fließ- bzw. Schädigungspotential

Finite Elemente Formulierung

d^k	Zum Riss k korrespondierende Abstandsfunktion
F_j^{km}	Zur Rissspitze km korrespondierende Rissspitzenfunktionen
\tilde{F}_4^{km}	Zur Rissspitze km korrespondierende modifizierte Rissspitzenfunktion
$\bar{\mathbf{k}}_{ij}, \tilde{\mathbf{k}}_{ij}, \hat{\mathbf{k}}_{ij}, \hat{\hat{\mathbf{k}}}_{ij}$	Anteile der Steifigkeitsmatrix
K^{km}	Zur Risskreuzung km korrespondierende Erweiterungsfunktion
L_n	LEGENDRE-Polynome
N_i	Finite Elemente Ansatzfunktionen
NE	Anzahl der finiten Elemente im Finite Elemente Netz
NK	Anzahl der Knoten im finiten Element
NN	Anzahl der Knoten im Finite Elemente Netz
NR	Anzahl der Risse
\mathcal{N}_{km}^t	Menge der mit den zur Rissspitze km korrespondierenden Rissspitzenfunktionen angereicherten Knoten
\mathcal{N}_{km}^k	Menge der mit der zur Risskreuzung km korrespondierenden Erweiterungsfunktion angereicherten Knoten
\mathcal{N}_k^s	Menge der mit der zum Riss k korrespondierenden Sigmoid-Funktion angereicherten Knoten
P_n	LAGRANGE-Polynom
r_{erw}	Erweiterungsradius der Rissspitzenfunktionen
$\bar{\mathbf{r}}_i, \hat{\mathbf{r}}_i$	Anteile des Vektors der inneren Kräfte
$\bar{\mathbf{r}}_i^s$	Anteil des Vektors der äußeren Kräfte
S^k	Zum Riss k korrespondierende Sigmoid-Funktion
\mathbf{u}_i^n	Vektor der Knotenfreiheitsgrade am Knoten i
$\hat{\mathbf{u}}_i, \hat{\hat{\mathbf{u}}}_i$	Anteile des Vektors der Knotenfreiheitsgrade am Knoten i
\mathbf{X}_j^n	Ortsvektor des Knotens j
\mathbf{X}_{km}^t	Ortsvektor der Rissspitze km
\mathbf{X}_{km}^{tw}	Ortsvektor des Ursprungs des Rissspitzensegments km
κ	KOLOSOV-Konstante
$\{\varphi_i\}$	Partition of Unity (Zerlegung der Eins)

Φ_n	Modifizierte LEGENDRE-Polynome
ξ_i	Koordinaten bezüglich eines natürlichen Koordinatensystems
ξ_i	Basisvektoren des natürlichen Elementkoordinatensystems
Ω_i^e	Elementgebiet des Elements i
Ω_i^n	Einflussbereich des Knotens i

Rissfortschritt

$\mathbb{C}_{\text{perf}}^{\text{ep}}$	Perfekt-plastische Materialtangente
E^*	Materialparameter
J	J-Integral
\mathcal{G}	Energiefreisetzungsrage
K_I, K_{II}, K_{III}	Spannungsintensitätsfaktoren
\mathbb{K}	Wärmeleitensor
M	Interaktionsintegral
q	Wichtungsfunktion zur Berechnung der Spannungsintensitätsfaktoren
Q	Temperaturfluss
r_c	Rissfortschrittslänge
S_i	Isolinie des Temperaturverlaufs ϑ
\mathbf{T}_s	Einheitstangentenvektor zum Riss
w	Wichtungsfunktion zur Berechnung der gemittelten Spannungen
θ_c	Rissfortschrittswinkel
ϑ	Temperatur
Π	Gespeicherte Energie
Π_{int}	Elastische Verzerrungsenergie
σ_m	Mittlere Hauptspannung
σ_s	Maximale Schubspannung
σ_m	Um die Risspitze gemittelter Spannungstensor
Ψ	Gesamtenergie
Ψ_{diss}	Dissipierte Energie