

Berichte aus der Mathematik

Jan Alexander Schnurr

The Symbol of a Markov Semimartingale

Shaker Verlag
Aachen 2009

Bibliographic information published by the Deutsche Nationalbibliothek

The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available in the Internet at <http://dnb.d-nb.de>.

Zugl.: Dresden, Techn. Univ., Diss., 2009

Copyright Shaker Verlag 2009

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the prior permission of the publishers.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8322-8244-8

ISSN 0945-0882

Shaker Verlag GmbH • P.O. BOX 101818 • D-52018 Aachen

Phone: 0049/2407/9596-0 • Telefax: 0049/2407/9596-9

Internet: www.shaker.de • e-mail: info@shaker.de

Abstract of the PhD thesis
‘The Symbol of a Markov Semimartingale’
by Alexander Schnurr

For Lévy processes it is a well known fact that there is a one-to-one correspondence between the elements of this class of processes and the so called continuous negative definite functions in the sense of Schoenberg $\psi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$. The connection between these concepts is given by

$$\mathbb{E}^x e^{i(X_t-x)'\xi} = e^{-t\psi(\xi)}. \quad (1)$$

In particular it is known that to every continuous negative definite function ψ there exists a corresponding Lévy process $(X_t)_{t \geq 0}$. Several properties of the process can be expressed in terms of analytic properties of its characteristic exponent ψ . Within the class of (universal) Markov processes, Lévy processes are those which are stochastically continuous and homogeneous in time and space. From the perspective of stochastic modeling the last point is a rather strong restriction since it means that the process ‘behaves the same’ on every point in space and time. Therefore, it is an interesting question if there exists a function, which is somehow similar to the characteristic exponent of a Lévy process, for a larger class of Markov processes. A class to start with is the one of (nice) Feller processes, i.e. Feller processes with the property that the test functions $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ are contained in the domain of their generator. In the investigation of these processes, a family of continuous negative definite functions $\xi \longmapsto p(x, \xi)$, ($x \in \mathbb{R}^d$) shows up in the Fourier representation of the generator

$$Au(x) = - \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix'\xi} p(x, \xi) \widehat{u}(\xi) \, d\xi \quad \text{for } u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d). \quad (2)$$

The function $p : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$, which is locally bounded in both variables and continuous negative definite in the second one, is called the symbol of the Feller process. For a Lévy process we obtain $p(x, \xi) = \psi(\xi)$, i.e. the symbol of a Lévy process is its characteristic exponent and it does not depend on x . In any other case the symbol is (like the process) state space dependent.

Unlike in the Lévy case, not every symbol $p(x, \xi)$ corresponds to a (Feller) process. One direction of the research in this area investigates the question if there exists such a process for a given symbol. For a survey on the different methods for constructing such a process we refer the reader to Section 3 of [2] and the references given there. Another direction of the research deals with the connection between a process and its symbol (cf. [5], [4]).

The starting point of our considerations is the following probabilistic formula (cf. [4])

$$p(x, \xi) = - \lim_{t \downarrow 0} \mathbb{E}^x \frac{e^{i(X_t-x)'\xi} - 1}{t} \quad (3)$$

which can be used to calculate the symbol of nice Feller processes, which fulfill the so called growth condition. This formula can be found as well in the survey paper [2], where the authors proposed the following program: *study the process through the symbol*. The present thesis should be seen in the tradition of this program. One of the main questions we are dealing with is, whether the above formula can be used to generalize the notion of the symbol to a larger class of processes and which class this might be. In this context we introduce so called Itô processes (in the sense of [1]). These are (universal) Markov processes which are semimartingales with respect to every $\mathbb{P}^x$ ($x \in \mathbb{R}^d$) having characteristics of the following form:

$$\begin{aligned} B_j^{(j)}(\omega) &= \int_0^t \ell^{(j)}(X_s(\omega)) \, ds \\ C_t^{jk}(\omega) &= \int_0^t q^{jk}(X_s(\omega)) \, ds \\ \nu(\omega; ds, dy) &= N(X_s(\omega), dy) \, ds. \end{aligned} \quad (4)$$

To deal with this class of processes we need concepts and results of different parts of the theory of stochastic processes. The most important facts of the so called ‘general theory of processes’ are stated without proofs in the last section of the introductory chapter. Universal Markov processes and their important subclasses of Feller and Lévy processes are treated in Chapter 1. In the literature, there are different notions which generalize the generator. We prove some results on the relationship between the different concepts.

In the second chapter we deal with semimartingales, Itô calculus and stochastic differential equations (SDEs). Some important concepts like the characteristic triplet of a semimartingale which is a generalization of the Lévy triplet are introduced. Although most of the results in this chapter are well known, we give new proofs for some of them which are more adapted to our point of view. In particular we show that the solution of a Lévy driven SDE

$$\begin{aligned} dX_t &= \Phi(X_t) dZ_t \\ X_0 &= x, \end{aligned} \tag{5}$$

is a nice Feller process, if the coefficient Φ is bounded. Furthermore, we prove that this result is in the following sense best possible: if the solution of an SDE of this type is a Markov process, the driving term has to be Lévy. For SDEs driven by Hunt processes we show that the vector consisting of the solution and the driving term is a Markov process and that this result has again a converse.

In Section 3.1 we establish the result that every (nice) Feller process is a semimartingale and even an Itô process. From a practical point of view this means that we cannot only integrate with respect to a Feller process, but we even know how to calculate this integral. Furthermore, this inclusion shows that the class of Itô processes is a candidate for which the generalized symbol could be introduced. Parts of Section 3.2 can be seen as a readable version of [1]. The results of this interesting but rather technical paper are used to obtain a different perspective on our results in Section 3.1.

We use the probabilistic formula (3) to define a symbol for an Itô process $X = (X_t)_{t \geq 0}$ in Chapter 4. If the differential characteristics $(\ell, Q, N(\cdot, dy))$ are bounded, this works nicely. If not, we use the following idea: instead of analyzing the original process, we stop X as soon as it leaves an arbitrary (but fixed) compact set K containing a neighborhood of the starting point of X , by using a stopping time T . What we obtain is the symbol

$$p(x, \xi) := - \lim_{t \downarrow 0} \mathbb{E}^x \frac{e^{i(X_t^T - x)' \xi} - 1}{t} \tag{6}$$

which exists always in the case of (finely) continuous differential characteristics. Furthermore, the limit does not depend on the choice of the compact set K and coincides with the limit (3) in the case of bounded differential characteristics. The limit we obtain is

$$p(x, \xi) = -i\ell(x)' \xi + \frac{1}{2} \xi' Q(x) \xi - \int_{y \neq 0} \left(e^{i\xi' y} - 1 - i\xi' y \cdot \chi(y) \right) N(x, dy). \tag{7}$$

For nice Feller processes this symbol coincides with the analytic symbol we encountered in the Fourier representation of their generator (1). We have thus established a generalization of the symbol from nice Feller processes with bounded differential characteristics to Itô processes with unbounded differential characteristics.

In Chapter 5 we return to the SDEs and prove some structural results for the symbols of their solutions. In Section 5.1 the Lévy driven SDE (5) is considered. We obtain that the symbol of the solution is $p(x, \xi) = \psi(\Phi(x)' \xi)$, where ψ is the characteristic exponent of the driving Lévy process. As a by-product we prove that to every symbol of this kind there exists a corresponding Itô process, which is a Feller process, if Φ is bounded. In Section 5.2 we turn to a more general case. The driving process is now itself an Itô process and the solution is no longer Markovian. However, the bivariate process consisting of the solution and the driving term is an Itô process and admits a symbol, which we calculate (see Theorem 5.4). The most general case is considered in the third section of this chapter. Itô processes can, in principle, be obtained as solutions of SDEs which are of the following kind:

$$\begin{aligned}
X_t &= x + \int_0^t \ell(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) d\tilde{W}_s \\
&+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} k(X_{s-}, z) 1_{\{|k(X_{s-}, z)| \leq 1\}} \left(\tilde{\mu}(ds, dz) - ds N(dz) \right) \\
&+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} k(X_{s-}, z) 1_{\{|k(X_{s-}, z)| > 1\}} \tilde{\mu}(ds, dz).
\end{aligned}$$

We calculate the symbol for solutions of this type of SDE in order to obtain the general structure of the symbol of an Itô process.

In the sixth Chapter we present some applications of the symbol. In the first section we emphasize the close relationship between the concepts: (extended) generator, symbol and semimartingale characteristics. Roughly speaking: if we calculate the symbol, we know immediately the generator on $C_c^2(\mathbb{R}^d)$, the extended generator on $C_b^2(\mathbb{R}^d)$ and the semimartingale characteristics. This allows us to connect the question, if there exists a Feller process (or an Itô process) associated with a given symbol with Jacod's semimartingale problem and with solvability problems of certain SDEs. In particular results in one of these directions can be transformed to the other settings.

For the symbols one can introduce so called indices. W. E. Pruitt did this on the level of Lévy processes and R. L. Schilling generalized this definition to nice Feller processes. In Section 6.2 we introduce the indices for Itô processes and give the following nice characterization for the index β_∞^x :

$$\beta_\infty^x = \limsup_{\|\eta\| \rightarrow \infty} \sup_{\|y-x\| \leq 2/\|\eta\|} \frac{\log |p(y, \eta)|}{\log \|\eta\|} \quad (8)$$

which is investigated in the sequel. We prove that in the case of a Lévy driven SDE (5) with bounded Φ the index of the solution is equal to the index of the driving term. This allows us some conclusions over the p -variation of the solution: let β_∞^ψ denote the index of the driving Lévy process. We obtain for the solution X that its strong p -variation is $\mathbb{P}^x$ -a.s. finite (for every $x \in \mathbb{R}^d$) on every compact time-interval $[0, T]$, if $p > \beta_\infty^\psi$. Furthermore, we prove results for the maximum process $(X - x)_t^* := \sup_{0 \leq s \leq t} \|X_s - x\|$.

In Chapter 7 we use the methods which were provided in the previous chapters on two concrete examples. One is the COGARCH process which was introduced, quite recently, in [3]. Section 6.2 is devoted to a classical example of the solution of an SDE, namely the Ornstein-Uhlenbeck process.

Within our investigations we have obtained the following inclusions for different classes of processes:

$$\text{Lévy} \subset (\text{nice}) \text{ Feller} \subset \text{Itô} \subset \text{Hunt semimartingale} \subset \text{Hunt} \subset \text{Markov}$$

In the appendix it is shown that all of these inclusions are strict.

References (Selection)

- [1] Cinlar, E., Jacod, J., Protter, P., and Sharpe, M. J. Semimartingales and Markov Processes. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, **54** (1980): 161–219.
- [2] Jacob, N. and Schilling, R. L. Lévy-type processes and pseudo differential operators. In *Lévy Process-Theory and Applications*, p. 139–168. Birkhäuser, 2001.
- [3] Klüppelberg, C., Lindner, A., and Maller, R. A Continuous-Time GARCH Process Driven by a Lévy Process: Stationarity and Second-Order Behaviour. *J. Appl. Prob.*, **41** (2004): 601–622.
- [4] Schilling, R. L. Conservativeness and Extensions of Feller Semigroups. *Positivity*, **2** (1998): 239–256.
- [5] Schilling, R. L. Growth and Hölder conditions for the sample paths of Feller processes. *Probab. Theory Rel. Fields*, **112** (1998): 565–611.

Zusammenfassung der Dissertation
„The Symbol of a Markov Semimartingale“
vorgelegt von Alexander Schnurr

Es ist eine bekannte Tatsache, dass zwischen der Klasse der Lévy Prozesse und den stetigen negativ definiten Funktionen im Sinne von Schoenberg $\psi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ eine 1-zu-1-Korrespondenz besteht. Die Verbindung zwischen beiden Konzepten ist durch folgende Gleichung gegeben:

$$\mathbb{E}^x e^{i(X_t-x)'\xi} = e^{-t\psi(\xi)}$$

Insbesondere weiß man, dass es zu jeder stetigen negativ definiten Funktion ψ einen korrespondierenden Lévy Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ gibt. Viele Eigenschaften des stochastischen Prozesses lassen sich durch analytische Eigenschaften des charakteristischen Exponenten ψ beschreiben. Innerhalb der Klasse der universellen Markov Prozesse sind Lévy Prozesse gerade solche, die stochastisch stetig sind sowie homogen in Zeit und Raum. Vom Standpunkt der stochastischen Modellierung ist dies eine starke Einschränkung; heißt es doch, dass der Prozess sich von jedem Punkt in Raum und Zeit aus auf die gleiche Weise entwickelt. Schon aus diesem Grund ist es eine interessante Frage, ob es für eine größere Klasse von Prozessen ein Pendant zum charakteristischen Exponenten eines Lévy Prozesses gibt. Eine erste Klasse für die solche Untersuchungen unternommen wurden sind *nette* Feller Prozesse; das sind Feller Prozesse mit der Eigenschaft, dass der Definitionsbereich des Erzeugers die Testfunktionen C_c^∞ enthält. Bei diesen Prozessen findet man eine Familie $\xi \longmapsto p(x, \xi)$, ($x \in \mathbb{R}^d$) von stetigen negativ definiten Funktionen in der Fourier-Darstellung des Erzeugers

$$Au(x) = - \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix'\xi} p(x, \xi) \widehat{u}(\xi) \, d\xi \quad \text{for } u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Die bivariate, lokal beschränkte Funktion $p : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ nennt man das Symbol eines Feller Prozesses. Für Lévy Prozesse gilt $p(x, \xi) = \psi(\xi)$, d.h. Symbol und charakteristischer Exponent fallen zusammen. Insbesondere hängt das Symbol eines Lévy Prozesses nicht von x ab. Für alle anderen Prozesse gilt: Wie der Prozess wird auch das Symbol raum-abhängig.

Anders als im Fall von Lévy Prozessen korrespondiert nicht jedes Symbol $p(x, \xi)$ zu einem Feller Prozess. Eine Forschungsrichtung in diesem Gebiet beschäftigt sich gerade mit der Frage, zu welchen Symbolen ein korrespondierender Prozess existiert. Für einen Überblick bezüglich der verschiedenen Konstruktionsmethoden verweisen wir auf [2] und die dort angegebenen Referenzen. Eine andere Forschungsrichtung hat es sich zur Aufgabe gemacht, die Verbindungen zwischen Prozess und Symbol aufzuzeigen (vgl. [5] und [4]).

Der Startpunkt unserer Untersuchungen ist folgende probabilistische Formel (vgl. [4])

$$p(x, \xi) = - \lim_{t \downarrow 0} \mathbb{E}^x \frac{e^{i(X_t-x)'\xi} - 1}{t}, \tag{1}$$

die man benutzen kann, um das Symbol eines netten Feller Prozesses auszurechnen, der eine sogenannte Wachstumsbedingung erfüllt. Einige der Hauptfragen, mit denen wir uns auseinandersetzen lassen sich wie folgt formulieren: Können wir (1) benutzen um für eine größere Klasse von Prozessen ein Symbol einzuführen? Welche Klasse kann das sein? Und: Wie sieht das Symbol aus, das man erhält. In diesem Kontext führen wir Itô Prozesse (vgl. [1]) ein. Dies sind universelle Markov Prozess, die zugleich bzgl. jedem $\mathbb{P}^x$ ($x \in \mathbb{R}^d$) Semimartingale sind und Charakteristiken der folgenden Gestalt haben:

$$\begin{aligned} B_j^{(j)}(\omega) &= \int_0^t \ell^{(j)}(X_s(\omega)) \, ds \\ C_t^{jk}(\omega) &= \int_0^t q^{jk}(X_s(\omega)) \, ds \\ \nu(\omega; ds, dy) &= N(X_s(\omega), dy) \, ds \end{aligned} \tag{2}$$

Um uns mit dieser Klasse von Prozessen auseinander zu setzen benötigen wir Denkweisen und Resultate aus verschiedenen Bereichen der Theorie stochastischer Prozesse. Die wichtigsten Fakten zur sogenannten „allgemeinen Theorie der Prozesse“ werden bereits im einleitenden Kapitel zusammengetragen. Universelle Markov Prozesse mit Ihren wichtigen Teilklassen den Feller und Lévy Prozessen werden im ersten Kapitel beschrieben. Insbesondere stellen wir einen Zusammenhang zwischen den verschiedenen Möglichkeiten her, den Erzeuger zu verallgemeinern.

Im zweiten Kapitel beschäftigen wir uns mit Semimartingalen, dem Itô-Kalkül und stochastischen Differentialgleichungen (SDEs). Wir führen einige wichtige Konzepte wie das charakteristische Tripel ein, dass die lokale Dynamik eines Semimartingals beschreibt. Obwohl viele der Resultate in diesem Kapitel bekannt sind, geben wir teilweise neue Beweise, die eher zu unserem Standpunkt passen. Beispielsweise zeigen wir, dass die Lösung der SDE

$$\begin{aligned} dX_t &= \Phi(X_t) dZ_t \\ X_0 &= x, \end{aligned} \tag{3}$$

die von einem Lévy Prozess $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ getrieben wird, ein netter Feller Prozess ist, wenn der Koeffizient Φ beschränkt ist. Ferner beweisen wir, dass dieses Resultat in gewissem Sinne das bestmögliche ist. Ist nämlich die Lösung einer SDE obigen Typs ein Markov Prozess, so muss der treibende Term ein Lévy Prozess sein. Für SDEs die von einem Hunt Prozess getrieben werden zeigen wir, dass der Vektor aus Lösung und treibendem Term ein Markov Prozess ist und auch dieses Ergebnis eine Umkehrung besitzt.

In Abschnitt 3.1 zeigen wir, dass jeder nette Feller Prozess ein Semimartingal ist und sogar ein Itô Prozess. Aus praktischer Sicht bedeutet dies, dass wir nicht nur gegen einen solchen Prozess integrieren können, sondern auch wissen wie man das Integral berechnet. Außerdem sind Itô Prozesse damit ein guter Kandidat um das verallgemeinerte Symbol einzuführen. Teile von Abschnitt 3.2 können als eine lesbare Version von [1] gesehen werden. Die Resultate dieser interessanten aber sehr technischen Arbeit verwenden wir um eine andere Perspektive auf die Resultate des vorhergehenden Abschnitts zu bekommen.

Im vierten Kapitel verwenden wir Formel (1) um für Itô Prozesse $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ein Symbol einzuführen. Wenn die Differential-Charakteristiken $(\ell, Q, N(\cdot, dy))$ beschränkt sind, funktioniert dies reibungslos. Ist dies nicht der Fall, so verwenden wir folgende Idee: Anstatt den ursprünglichen Prozess zu betrachten, stoppen wir diesen sobald er eine beliebige (aber festes) kompakte Umgebung K vom Startpunkt x verlässt mittels einer Stoppzeit T . Wir erhalten damit die Formel

$$p(x, \xi) := - \lim_{t \downarrow 0} \mathbb{E}^x \frac{e^{i(X_t^T - x)' \xi} - 1}{t}. \tag{4}$$

Dieser Limes existiert unter der schwachen Voraussetzung, dass die Differential-Charakteristiken stetig sind bezüglich der feinen Topologie. Weiterhin hängt der Limes nicht von der Wahl von K ab und fällt im beschränkten Fall mit (1) zusammen. Der Grenzwert, den wir erhalten ist

$$p(x, \xi) = -i\ell(x)' \xi + \frac{1}{2} \xi' Q(x) \xi - \int_{y \neq 0} \left(e^{i\xi' y} - 1 - i\xi' y \cdot \chi(y) \right) N(x, dy).$$

Für nette Feller Prozesse entspricht dies gerade dem Symbol, dass uns in der Fourier Darstellung des Erzeugers begegnet ist. Wir haben also den Begriff des Symbols in natürlicher Weise von netten Feller Prozessen mit beschränkten Differential-Charakteristiken auf Itô Prozesse mit unbeschränkten Differential-Charakteristiken erweitert.

In Kapitel fünf kehren wir zu dem Themenkreis SDEs zurück. Wir beschäftigen uns mit diesen nun aus unserer neu gewonnenen Perspektive. In Abschnitt 5.1 zeigen wir, dass die Lösung der SDE (3) das Symbol $p(x, \xi) = \psi(\Phi(x)' \xi)$ hat, wobei ψ der charakteristische Exponent des treibenden Lévy Prozesses ist. Dies zeigt insbesondere, dass zu jedem Symbol welches diese Gestalt hat ein Itô Prozess

korrespondiert, der falls Φ beschränkt ist, ein Feller Prozess ist. In Abschnitt 5.2 beschäftigen wir uns mit einem allgemeineren Fall. Der treibende Term ist nun kein Lévy Prozess mehr, sondern selbst ein Itô Prozess. In diesem Fall ist die Lösung i.A. nicht mehr Markovsch. Wir zeigen aber, dass der Vektor aus Lösung und treibendem Term ein Itô Prozess ist und berechnen das korrespondierende Symbol. Der allgemeinste Fall wird schließlich in Abschnitt 5.3 untersucht: Itô Prozesse können prinzipiell als Lösungen spezieller SDEs, die unter anderem kompensierte Zufallsmaße als treibende Terme enthalten dargestellt werden. Indem wir das Symbol dieser SDEs berechnen, erhalten wir die allgemeine Struktur des Symbols eines Itô Prozesses.

Im sechsten Kapitel wenden wir uns Anwendungen des Symbols zu. Im ersten Abschnitt beschreiben wir den engen Zusammenhang zwischen den Konzepten: (erweiterter) Erzeuger, Symbol und Semimartingal-Charakteristiken. Dieser lässt sich folgendermaßen zusammenfassen: Wenn wir das Symbol berechnen, dann kennen wir automatisch den Erzeuger auf $C_c^2(\mathbb{R}^d)$, den erweiterten Erzeuger auf $C_b^2(\mathbb{R}^d)$ und die Semimartingal-Charakteristiken. Dies erlaubt es uns auch die Frage nach der Existenz eines Prozesses der zu einem vorgegebenen Symbol korrespondiert mit Jacod's Semimartingal-Problem und Lösbarkeits-Problemen bestimmter SDEs zu verknüpfen.

Für Symbole kann man sogenannte Indizes einführen. W. E. Pruitt hat dies für Lévy Prozesse getan und R. L. Schilling verallgemeinerte dieses Konzept auf Feller Prozesse. In Abschnitt 6.2 führen wir Indizes für Itô Prozesse ein und beweisen die folgende hübsche Charakterisierung des Index β_∞^x

$$\beta_\infty^x = \limsup_{\|\eta\| \rightarrow \infty} \sup_{\|y-x\| \leq 2/\|\eta\|} \frac{\log |p(y, \eta)|}{\log \|\eta\|},$$

der im Folgenden näher untersucht wird. Wir zeigen, dass im Fall der Lévy getriebenen SDE (3) mit beschränktem Φ der Index β_∞^x der Lösung dem Index des treibenden Terms entspricht. Dies erlaubt uns folgende Aussage: Wenn wir für den Index des treibenden Terms β_∞^ψ schreiben, dann ist die starke p -Variation der Lösung X $\mathbb{P}^x$ -fast sicher auf jedem kompakten Zeitintervall $[0, T]$ für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ endlich, wenn $p > \beta_\infty^\psi$. Daneben beweisen wir Aussagen über das Grenzwverhalten des Maximalprozesses $(X - x)_t^* := \sup_{0 \leq s \leq t} \|X_s - x\|$.

Im siebenten Kapitel wenden wir die vorher bereit gestellten Methoden exemplarisch auf zwei Prozesse an, die verwendet werden um Finanzdaten zu modellieren. Dies sind zum einen der COGARCH Prozess, der in [3] eingeführt wurde, also relativ jungen Datums ist; zum anderen der Ornstein-Uhlenbeck Prozess, ein Klassiker unter den Prozessen, die sich über eine SDE definieren lassen.

In unseren Untersuchungen ergibt sich die folgende Inklusionskette für Prozessklassen:

$$\text{Lévy} \subset (\text{nett}) \text{ Feller} \subset \text{Itô} \subset \text{Hunt Semimartingal} \subset \text{Hunt} \subset \text{Markov}$$

Im Appendix zeigen wir unter anderem, dass jede dieser Inklusionen strikt ist.

Literatur

- [1] Cinlar, E., Jacod, J., Protter, P., and Sharpe, M. J. Semimartingales and Markov Processes. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, **54** (1980): 161–219.
- [2] Jacob, N. and Schilling, R. L. Lévy-type processes and pseudo differential operators. In *Lévy Process-Theory and Applications*, p. 139–168. Birkhäuser, 2001.
- [3] Klüppelberg, C., Lindner, A., and Maller, R. A Continuous-Time GARCH Process Driven by a Lévy Process: Stationarity and Second-Order Behaviour. *J. Appl. Prob.*, **41** 2004: 601–622.
- [4] Schilling, R. L. Conservativeness and Extensions of Feller Semigroups. *Positivity*, **2** (1998): 239–256.
- [5] Schilling, R. L. Growth and Hölder conditions for the sample paths of Feller processes. *Probab. Theory Rel. Fields*, **112** (1998): 565–611.