

Verallgemeinerte Eigenfunktionen und lokale Integralcharakteristiken bei quasi-statischer Rissausbreitung in anisotropen Materialien

Dissertation
zur Erlangung der Würde eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
am Fachbereich Mathematik
der Universität Kassel

vorgelegt von

Dipl.-Math. Martin Steigemann

geboren in Fritzlar

Institut für Analysis und Angewandte Mathematik

Universität Kassel

2008

Hauptberichter: Prof. Dr. M. Specovius-Neugebauer

Mitberichter: Prof. Dr. R. Hochmuth
Prof. Dr.-Ing. H.A. Richard

Tag der mündlichen Prüfung: 25. August 2008

Martin Steigemann
Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis und Angewandte Mathematik
Universität Kassel
Heinrich-Plett-Straße 40
34132 Kassel

martin.steigemann@mathematik.uni-kassel.de

Berichte aus der Mathematik

Martin Steigemann

**Verallgemeinerte Eigenfunktionen und lokale
Integralcharakteristiken bei quasi-statischer
Rissausbreitung in anisotropen Materialien**

D 34 (Diss. Univ. Kassel)

Shaker Verlag
Aachen 2009

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Zugl.: Kassel, Univ., Diss., 2008

Copyright Shaker Verlag 2009

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8322-8142-7

ISSN 0945-0882

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen

Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9

Internet: www.shaker.de • E-Mail: info@shaker.de

Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand mit Unterstützung eines Promotionsstipendiums der Universität Kassel und ab Juli 2006 im Rahmen des Sonderforschungsbereichs TRR 30 „*Prozessintegrierte Herstellung funktional gradierter Strukturen auf der Grundlage thermo-mechanisch gekoppelter Phänomene*“ im Teilprojekt D1 „*Risswachstum in gradierten Materialien und Strukturen*“ an der Universität Kassel, gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG).

An erster Stelle möchte ich mich bei Frau Prof. Dr. Maria Specovius-Neugebauer sehr herzlich für die Aufgabenstellung, die hervorragende Betreuung und Förderung bedanken. Sie hatte immer ein offenes Ohr für meine Fragen und war jederzeit bereit, mit mir über verschiedenste Probleme und Ideen zu diskutieren.

Herrn Prof. Dr.-Ing. H.A. Richard und Herrn Dr.-Ing. Markus Fulland der Fachgruppe Angewandte Mechanik der Universität Paderborn danke ich für die sehr gute Zusammenarbeit im Sonderforschungsbereich sowie viele Diskussionen, praktische Tipps und die Bereitstellung von experimentellen Daten und Bildern.

I also want to thank Prof. Dr. S.A. Nazarov from the Institute for Problems of Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences in St. Petersburg for many helpful discussions during his visits at our University in Kassel.

Herrn Prof. Dr. R. Hochmuth danke ich für die Übernahme des Koreferats.

Weiter möchte ich mich beim gesamten Fachbereich Mathematik für die angenehme Arbeitsatmosphäre bedanken, wobei ich besonders Thomas Geffers und Stefan Schreiber für die vielen Diskussionen danken möchte. Weiter erwähnen möchte ich insbesondere Peter Horn, Stefan Kopecz und Dr. Philipp Birken. Bei Dr. Susanne Langer und Anja Panse bedanke ich mich für die Korrekturen des Manuskripts.

Besonders danke ich auch meinen Eltern und meiner Freundin Ellen für die Unterstützung in den letzten Jahren.

Kassel, im Mai 2008

Martin Steigemann

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	i
Inhaltsverzeichnis	v
Einleitung	1
1 Physikalische und mathematische Grundlagen	5
1.1 Elastizitätstheorie	5
1.1.1 Verzerrung und Spannung	5
1.1.2 Matrix-Schreibweise	8
1.1.3 Ebene Zustände	10
1.2 Gebiete und Funktionenräume	12
1.3 Elliptische Systeme partieller Differentialgleichungen	16
1.3.1 Differentialoperatoren und Elliptizität	17
1.3.2 Die Bedingung von SHAPIRO-LOPATINSKIJ und elliptische Randwertprobleme	19
1.3.3 Systeme partieller Differentialgleichungen	20
1.3.4 Partielle Integration und die GREEN'schen Formeln	22
1.3.5 Polynom-Eigenschaft und algebraisch vollständige Operatoren	23
1.3.6 Eigenschaften des Elastizitätsoperators	28
2 Grundlagen der KONDRATIEV-Theorie	31
2.1 Elliptische Randwertprobleme mit Parameter	32
2.2 Elliptische Randwertprobleme im Kegel	36
2.2.1 Lösbarkeit im Kegel	36
2.2.2 Asymptotisches Verhalten der Lösungen	40

2.3	Elliptische Randwertprobleme in Gebieten mit konischen Punkten	44
3	Eigenfunktionen des Elastizitätsoperators	49
3.1	Normierung der Eigenfunktionen	53
3.2	Analytische Eigenfunktionen bei Isotropie	63
3.3	Polynomiale Lösungen für beliebige Anisotropien	68
3.4	Explizite Eigenfunktionen für spezielle Anisotropien	69
3.4.1	Affine Koordinatentransformationen	69
3.4.2	Algebraisch äquivalente Materialien	71
3.4.3	Die transformierten Eigenfunktionen	83
3.4.4	Normierung der transformierten Eigenfunktionen	85
3.5	Numerische Lösungen für allgemeine Anisotropien	86
4	Mathematische lineare Bruchmechanik	91
4.1	Das Energiekriterium nach GRIFFITH	93
4.1.1	Asymptotische Analysis	97
4.1.2	Energie und Energiefreisetzungsrate	106
4.2	Asymptotische Darstellung der Energiefreisetzung	108
4.2.1	Gewichtsfunktionen für das Ausgangsproblem	108
4.2.2	Gewichtsfunktionen für das zweite Grenz-Problem	113
4.2.3	Die Methode der angepassten asymptotischen Entwicklungen	122
4.2.4	Mathematische Rechtfertigung der asymptotischen Darstellung	127
4.2.5	Die Energiefreisetzungsmatrix und Berechnung des Risspfades	141
4.2.6	Der Zusammenhang mit dem Kriterium von IRWIN	157
4.3	Quasi-statisches Risswachstum	160
4.3.1	Das quasi-statische Modell	161
4.3.2	Gewichtsfunktionen für einen geknickten Riss	164
4.3.3	Zyklische Spannungsintensitätsfaktoren und Rissgeschwindigkeit	169
5	Numerische Berechnung der Spannungsintensitätsfaktoren	173
5.1	Schwache Lösungen und Projektionen	174

5.2	Numerische Lösungen und Finite Elemente	178
5.3	Fehler-Abschätzungen	185
6	Numerische Berechnung der Energiefreisetzungsmatrix	191
6.1	Künstliche Randbedingungen	192
6.2	Fehlerabschätzung und Berechnung der Energiefreisetzungsmatrix	198
7	Numerische Beispiele	201
7.1	Algebraisch äquivalente Materialien	203
7.2	Die Kompakt-Zug-Probe (CT-Specimen)	206
7.3	Die CTS-Probe für Mixed-Mode-Belastungen	210
7.3.1	Beispiel 1: Ein isotropes Material	210
7.3.2	Beispiel 2: Ein orthotropes Material	217
	Literaturverzeichnis	225
	Symbolverzeichnis	231
	Erklärung	235
	Lebenslauf	237