

Mathematik-
Übungsaufgaben
mit Lösungen
für Schule, Abitur und Studium

Uwe Kraeft

2008

Berichte aus der Mathematik

Uwe Kraeft

**Mathematik-Übungsaufgaben
mit Lösungen für
Schule, Abitur und Studium**

Shaker Verlag
Aachen 2008

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Copyright Shaker Verlag 2008

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8322-7292-0

ISSN 0945-0882

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen

Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9

Internet: www.shaker.de • E-Mail: info@shaker.de

Vorwort

Zu dem Buch „**Einführung in die Mathematik**“ des Autors [KrI], das zu Beginn des **Jahres der Mathematik 2008** im selben Verlag erschienen ist, wurde eine begrenzte Zahl von Übungsaufgaben zusammengestellt. Nach dem Leitsatz „Weniger ist mehr!“ wurden nur ausgewählte, prinzipiell wichtige und unterschiedliche Aufgaben entwickelt. Ziel ist es, dass der Leser die entsprechenden Strategien („Tricks“), Formeln, Lehrsätze sowie Algorithmen (Rechenvorschriften) lernt und die Fähigkeit erlangt, diese entsprechend der Aufgabenstellung anzuwenden. Dabei sollen wesentliche Verfahren und Formeln nach Meinung des Autors einfach auswendig gelernt werden. Selbstverständlich gibt es viele Formeln, die in Formelsammlungen nachzulesen sind; aber auch diese sollte man „im Prinzip“ kennen.

Geometrische Konstruktionen werden in diesem Buch nur prinzipiell und nicht in allen Einzelheiten behandelt.

Zur Lösung einer Aufgabe soll vorher der entsprechende Text in der „**Einführung in die Mathematik**“ [KrI] gelesen werden. Die Lösungen sind jeweils abzudecken und nach eigener Bearbeitung zu vergleichen. Es wird empfohlen, die Aufgabe dann mindestens noch einmal ganz allein an einem anderen Tag zu wiederholen.

Das Buch soll möglichst vollständig und eher langsam durchgearbeitet werden. Dabei sollte sich der Leser fragen: was ist die Aufgabe und wie sieht der zu erlernende Lösungsweg aus, um ähnliche Aufgaben allein lösen zu können. Auch vor dem Abitur und zum Beginn eines Studiums machen Wiederholungen von Anfang an Sinn. Daneben sind selbstverständlich der Unterricht und die Schulbücher zu beachten. Die Aufgabensammlung eignet sich aber auch zum Selbststudium.

Der Inhalt wurde sorgfältig auf Fehler geprüft, die aber nicht gänzlich ausgeschlossen werden können. Eine Gewährleistung oder Garantie für die Richtigkeit kann nicht übernommen werden. Der Autor ist für entsprechende Hinweise oder Verbesserungsvorschläge dankbar.

Konkordanzliste:

Klasse	Kapitel
5	2
6	3
7	4
8	5
9	6
10	7
11	8
12, 13	9

Überleitung zum Studium 10, 11

Griechisches Alphabet:

α A	alpha	β B	beta	γ Γ	gamma	δ Δ	delta
ϵ E	epsilon	ζ Z	zeta	η H	eta	θ Θ	theta
ι I	iota	κ K	kappa	λ Λ	lambda	μ M	my
ν N	ny	ξ Ξ	xi	\omicron O	omikron	π Π	pi
ρ P	rho	σ Σ	sigma	τ T	tau	υ Y	ypsilon
ϕ Φ	phi	χ X	chi	ψ Ψ	psi	ω Ω	omega

Symbole (Auswahl)

$\Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow$	hieraus folgt (in den angegebenen Richtungen)
\in	ist Element von (ist enthalten in)
\notin	ist kein Element von (ist nicht enthalten in)
$A=\{a,b,c\}$	Beispiel einer Menge A mit den Elementen a, b und c
$y=f(x)$	Funktion von x
a, α, \dots	Elemente (... bedeutet und so weiter)
$-a, a^{-1} = \frac{1}{a}$	inverse Elemente
m, n, \dots	meist natürliche Zahlen
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ...; $\mathbb{N}^0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
\mathbb{Z}	ganze Zahlen ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...
\mathbb{Q}	Brüche oder rationale Zahlen $\frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$
\mathbb{R}	reelle Zahlen
$[...],]...[$	geschlossenes, offenes Intervall, ...
$[a,b]$	geschlossenes Intervall $a \leq x \leq b$
$a = \alpha + i\beta$	$= \alpha + \beta i$ komplexe Zahl mit α (Realteil), β (Imaginärteil) $\in \mathbb{R}, i^2 = -1$
$a^* = \bar{a} = \alpha - i\beta$	konjugiert(e) komplexe Zahl
$a = \alpha + i\beta$	$= r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ in Polarkoordinaten; $r = a $ Absolutbetrag von a oder Länge des Vektors \vec{r} ; φ heißt Argument $\arg(a)$, $\arg a$ oder Polarwinkel
\mathbb{C}	komplexe Zahlen
$P(x y z)$	Punkt mit den Koordinaten x,y,z
\vec{r}	$= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x, y, z)$ Vektor mit den Komponenten x,y,z
$ \vec{r} $	Betrag (Länge) des Vektors \vec{r}

LE, FE, RE Längen-, Flächen-, Raumeinheit(en)

=	gleich (identisch)
\equiv	$a \equiv b \pmod{c}$ heißt $(a-b)/c \in \mathbb{Z}$ für $a, b \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{N}$
\cong	so nah wie gewünscht, aber nicht gleich
\approx	ungefähr, gerundet, kann für große n angenähert werden
\neq	nicht gleich
$<, >$	kleiner, größer

$(a,b)=d$ ggT (größter gemeinsamer Teiler) von a und b ist d
 $\{(a,b)\}=e$ kgV (kleinstes gemeinsames Vielfaches) von a und b ist e

$\frac{p}{q}$

Verhältnis oder gemeiner Bruch $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$,

der echt $\left| \frac{p}{q} \right| < 1$ oder unecht $\left| \frac{p}{q} \right| \geq 1$ sein kann

$n!$ = $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$

$\binom{a}{b}$ $\frac{a!}{b!(a-b)!} = \frac{a(a-1)(a-2) \dots (a-b+1)}{b(b-1)(b-2) \dots 1}$ Binomialkoeffizient

$\sum_{i=1}^n a_i$ = $a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$\prod_{i=1}^n a_i$ = $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$

a^n n -te Potenz von a (n Exponent)

a^{-n} $1/a^n$

$a^{1/m}$ m -te Wurzel von a (zum Beispiel $a^{1/2} = \sqrt{a}$)

$a^{n/m}$ m -te Wurzel von a^n

$a \log x$ = $\log_a x$ Logarithmus zur Basis a mit $x = a^{\log_a x}$

$\ln x$ natürlicher Logarithmus von x mit $x = e^{\ln x}$

$\sin x$ trigonometrische Funktion Sinus

$\cos x$ trigonometrische Funktion Kosinus

$\tan x$ trigonometrische Funktion Tangens

$f'(x)$ $\frac{df(x)}{dx}$, $dx > 0$ Differenzial

$\int f(x) dx$ $F(x) + c$ Integral

Inhalt

	Seite
1. Mathematik verstehen- - - - -	1
2. Grundlagen der mathematischen Sprache - - -	1
3. Brüche, Verhältnisse und Symmetrie - - -	7
3.1 Brüche und Verhältnisse - - - - -	7
3.2 Symmetrie - - - - -	11
4. Rationale Zahlen, Prozentrechnung und Geometrie -	13
4.1 Rationale Zahlen und Prozentrechnung - - -	13
4.2 Anfänge der Geometrie - - - - -	16
5. Einfache Gleichungen und Fortsetzung der Geometrie -	17
5.1 Einfache Gleichungen - - - - -	17
5.2 Fortsetzung der Geometrie - - - - -	22
6. Algebra und Ergänzungen zur Geometrie der Ebene -	25
6.1 Elementare Algebra - - - - -	25
6.2 Geometrie der Ebene - - - - -	29
7. Potenzen, Wahrscheinlichkeiten, Trigonometrie, Geometrie	31
7.1 Potenzen, Exponentialfunktion und Wachstum - -	31
7.2 Wahrscheinlichkeiten - - - - -	34
7.3 Geometrie und Trigonometrie - - - - -	36
8. Funktionen, Differenzialrechnung und Statistik - -	37
8.1 Funktionen und Differenzialrechnung - - - -	37
8.2 Ergänzungen zur Statistik - - - - -	42
9. Infinitesimalrechnung, Gleichungssysteme und Vektoren	43
9.1 Folgen und Grenzwerte - - - - -	43
9.2 Infinitesimalrechnung - - - - -	44
9.3 Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion - -	47
9.4 Gebrochenrationale und trigonometrische Funktionen -	48
9.5 Lineare Gleichungssysteme LGS - - - - -	50
9.6 Vektoren - - - - -	50
9.7 Mathematische Grundaufgaben der Physik und Chemie	57
10. Überleitung zum Studium - - - - -	59
10.1 Algebra - - - - -	59
10.2 Infinitesimalrechnung - - - - -	63
11. Einführung in die Zahlentheorie und reine Mathematik	67
Ergänzungen zur „Einführung in die Mathematik“ - -	70
GTR SHARP EL-9650 und EL-9900 Kurzanleitung (Beispiele)	71