Einführung
in die
Mathematik

Uwe Kraeft

2008

Berichte aus der Mathematik

Uwe Kraeft

Einführung in die Mathematik

Shaker Verlag
Aachen 2008

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Copyright Shaker Verlag 2008

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8322-6879-4

ISSN 0945-0882

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen

Telefon: 02407/95 96 - 0 • Telefax: 02407/95 96 - 9

Internet: www.shaker.de • E-Mail: info@shaker.de

Vorwort

Ich habe in vielen Gesprächen gelernt, dass das Verständnis der Mathematik zunächst parallel zur geschichtlichen Entwicklung der Mathematik verläuft. Es bedarf zum Beispiel in der Tat einer guten Erklärung, was Zahlen sind, warum es negative Zahlen gibt, was die Null bedeutet, was „unendlich“ oder inkommensurabel (nicht messbar in Verhältnissen zur Einheit) heißt und vor allem, was Unbekannte sind. Die Mathematik ist vergleichbar mit einer Sprache, die wir auch vom Einfachen zum Komplizierten hin und nicht gleich mit den feinsten Spezialisierungen der Grammatik lernen, um in unmissverständlicher, aber nicht unbedingt elegantester Weise kommunizieren zu können.

Ausgehend vom Zählen und Rechnen, von den alten Hochkulturen und vom antiken Griechenland entwickelte sich unsere Mathematik insbesondere in den letzten 300 Jahren. Dabei ist das Werk vieler Menschen zu erwähnen, die bahnbrechende Leistungen vollbracht haben und kulturelle Vorbilder sind. Obwohl sich die heutige Mathematik sehr weit von der Schulmathematik entfernt hat, halte ich es für wichtiger, dass das Verständnis für das mathematische Denken gefördert wird, als dass der Lehr- und Lernstoff immer mehr erweitert wird. Andererseits tragen die so beliebten Crash-Kurse, in denen für Prüfungen möglichst viel Lernstoff in kürzester Zeit wiederholt wird („Mathe fürs Abi in 3 Tagen“), kaum zum Verständnis der Mathematik bei und bringen eher Stress. In diesem Buch wird deshalb versucht, in überschaubarem und klassenweise nachvollziehbarem Umfang die wesentlichen Elemente der Mathematik anzubieten. Das Ziel ist es, Verständnis und auch Interesse für Mathematik und logisches Denken zu fördern, wovon der Lernende sicher profitiert.

Dieser Text umfasst etwa den gestrafften Lehrstoff der Schulklassen 5 bis 12/13, wie zum Beispiel nach dem Lambacher-Schweizer, sowie in den letzten Kapiteln die Vorbereitung eines Studiums. Er ist auch insbesondere für das Selbststudium eines breiteren Kreises von Menschen geeignet, die ihre Kenntnisse in Mathematik auffrischen oder ergänzen wollen und ist als kleiner Beitrag zum **Jahr der Mathematik 2008** gedacht.

1. Januar 2008

Uwe Kraeft

Konkordanzliste:

Klasse	Kapitel
5	2
6	3
7	4
8	5
9	6
10	7
11	8
12, 13	9

Überleitung zum Studium 10, 11, 12

Der Leser kann selbst entscheiden, auf welcher Stufe und damit in welchem Kapitel er einsteigen möchte. Allerdings wird dennoch empfohlen, alle Texte, gegebenenfalls mehrfach, zu lesen, da bestimmte Sachverhalte langsam entwickelt und Bekanntes nur gelegentlich wiederholt wird. Merktexte und Lernformeln sind eingerahmt.

Der Inhalt wurde sorgfältig auf Fehler geprüft, die aber nicht gänzlich ausgeschlossen werden können. Eine Gewährleistung oder Garantie für die Richtigkeit kann nicht übernommen werden. Der Autor ist für entsprechende Hinweise oder Verbesserungsvorschläge dankbar.

Griechisches Alphabet:

α A	alpha	β B	beta	γ Γ	gamma	δ Δ	delta
ϵ E	epsilon	ζ Z	zeta	η H	eta	θ Θ	theta
ι I	iota	κ K	kappa	λ Λ	lambda	μ M	my
ν N	ny	ξ Ξ	xi	$\omicron$ O	omikron	π Π	pi
ρ P	rho	σ Σ	sigma	τ T	tau	υ Y	ypsilon
ϕ Φ	phi	χ X	chi	ψ Ψ	psi	ω Ω	omega

Symbole (Auswahl)

$\Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow$	hieraus folgt (in den angegebenen Richtungen)
$\in$	ist Element von (ist enthalten in)
$\notin$	ist kein Element von (ist nicht enthalten in)
$A=\{a,b,c\}$	Beispiel einer Menge A mit den Elementen a, b und c
$y=f(x)$	Funktion von x
$a, \alpha, \dots$	Elemente (... bedeutet und so weiter)
$-a, a^{-1} = \frac{1}{a}$	inverse Elemente
$m, n, \dots$	meist natürliche Zahlen
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ...
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...
$\mathbb{Q}$	Brüche oder rationale Zahlen $\frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen
$[...],]...[$	geschlossenes, offenes Intervall, ...
$[a,b]$	geschlossenes Intervall $a \leq x \leq b$
$a = \alpha + i\beta$	$= \alpha + \beta i$ komplexe Zahl mit α (Realteil), β (Imaginärteil) $\in \mathbb{R}, i^2 = -1$
$a^* = \bar{a} = \alpha - i\beta$	konjugiert(e) komplexe Zahl
$a = \alpha + i\beta$	$= r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ in Polarkoordinaten; $r = a $ Absolutbetrag von a oder Länge des Vektors $\vec{r}$; φ heißt Argument $\arg(a)$, $\arg a$ oder Polarwinkel
$\mathbb{C}$	komplexe Zahlen
ζ	n-te Einheitswurzel mit $\zeta^n = 1$
$P(x y z)$	Punkt mit den Koordinaten x,y,z
$\vec{r}$	$= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x, y, z)$ Vektor mit den Komponenten x,y,z
$ \vec{r} $	Betrag (Länge) des Vektors $\vec{r}$

=	gleich (identisch)
$\equiv$	$a \equiv b \pmod{c}$ heißt $(a-b)/c \in \mathbb{Z}$ for $a, b \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{N}$
$\cong$	so nah wie gewünscht, aber nicht gleich
$\approx$	ungefähr, gerundet, kann für große n angenähert werden
$\neq$	nicht gleich
$<, >$	kleiner, größer

$(a,b)=d$	ggT (größter gemeinsamer Teiler) von a und b ist d
$\{(a,b)\}=e$	kgV (kleinstes gemeinsames Vielfaches) von a und b ist e
$\frac{p}{q}$	Verhältnis oder gemeiner Bruch $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$,

der echt $\left| \frac{p}{q} \right| < 1$ oder unecht $\left| \frac{p}{q} \right| \geq 1$ sein kann

$n!$	$= 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$
$\binom{a}{b}$	$\frac{a!}{b!(a-b)!} = \frac{a(a-1)(a-2) \cdot \dots \cdot (a-b+1)}{b(b-1)(b-2) \cdot \dots \cdot 1}$ Binomialkoeffizient

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$\prod_{i=1}^n a_i = a_1 * a_2 * \dots * a_n$$

a^n n-te Potenz von a (n Exponent)

a^{-n} $1/a^n$

$a^{1/m}$ m-te Wurzel von a (zum Beispiel $a^{1/2} = \sqrt{a}$)

$a^{n/m}$ m-te Wurzel von a^n

$\log_a x$ Logarithmus zur Basis a mit $x = a^{\log_a x}$

$\ln x$ natürlicher Logarithmus von x mit $x = e^{\ln x}$

$\sin x$ trigonometrische Funktion Sinus

$\cos x$ trigonometrische Funktion Kosinus

$\tan x$ trigonometrische Funktion Tangens

$f'(x)$ $\frac{df(x)}{dx}$, $dx > 0$ Differential

$\int f(x) dx$ $F(x) + c$ Integral

Inhalt

	Seite
1. Mathematik verstehen- - - - -	- 1
2. Grundlagen der mathematischen Sprache - - - -	- 5
3. Brüche, Verhältnisse und Symmetrie - - - -	- 17
3.1 Brüche und Verhältnisse - - - - -	- 17
3.2 Symmetrie - - - - -	- 27
4. Rationale Zahlen, Prozentrechnung und Geometrie -	- 31
4.1 Rationale Zahlen und Prozentrechnung - - - -	- 31
4.2 Anfänge der Geometrie - - - - -	- 35
5. Einfache Gleichungen und Fortsetzung der Geometrie -	- 39
5.1 Einfache Gleichungen - - - - -	- 39
5.2 Fortsetzung der Geometrie - - - - -	- 49
6. Algebra und Ergänzungen zur Geometrie der Ebene -	- 57
6.1 Elementare Algebra - - - - -	- 57
6.2 Geometrie der Ebene - - - - -	- 69
7. Potenzen, Wahrscheinlichkeiten, Trigonometrie, Geometrie -	- 73
7.1 Potenzen, Exponentialfunktion und Wachstum - - -	- 73
7.2 Wahrscheinlichkeiten - - - - -	- 79
7.3 Geometrie und Trigonometrie - - - - -	- 83
8. Funktionen, Differenzialrechnung und Statistik - - -	- 89
8.1 Funktionen und Differenzialrechnung - - - - -	- 89
8.2 Ergänzungen zur Statistik - - - - -	-102
9. Infinitesimalrechnung, Gleichungssysteme und Vektoren	-103
9.1 Folgen und Grenzwerte - - - - -	-103
9.2 Infinitesimalrechnung- - - - -	-107
9.3 Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion - - -	-114
9.4 Gebrochenrationale und trigonometrische Funktionen -	-116
9.5 Lineare Gleichungssysteme LGS - - - - -	-118
9.6 Vektoren - - - - -	-121
10. Überleitung zum Studium - - - - -	-135
10.1 Algebra - - - - -	-136
10.2 Infinitesimalrechnung- - - - -	-147
11. Einführung in die Zahlentheorie und reine Mathematik -	-157
12. Eine kurze Geschichte der Mathematik - - - - -	-169
Auswahl von Literatur - - - - -	-177
Häufig benutzte Formeln- - - - -	-179