# Modellreduktion in elastischen Mehrkörpersystemen

Von der Fakultät Maschinenbau der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte Abhandlung

Vorgelegt von

**Michael Lehner**

geboren in Bogen

| | |
|---|---|
| Hauptberichter: | Prof. Dr.-Ing. P. Eberhard |
| Mitberichter: | Prof. Dr.-Ing. B. Lohmann |

| | |
|---|---|
| Tag der Einreichung: | 16. April 2007 |
| Tag der mündlichen Prüfung: | 1. Oktober 2007 |

Institut für Technische und Numerische Mechanik
Universität Stuttgart

2007

Schriften aus dem Institut für Technische und Numerische
Mechanik der Universität Stuttgart

Herausgeber: Prof. Dr.-Ing. Peter Eberhard

Band 10/2007

**Michael Lehner**

# Modellreduktion in elastischen Mehrkörpersystemen

D 93 (Diss. Universität Stuttgart)

Shaker Verlag
Aachen 2007

**Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Zugl.: Stuttgart, Univ., Diss., 2007

Copyright Shaker Verlag 2007
Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8322-6783-4
ISSN 1861-1651

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen
Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9
Internet: www.shaker.de • E-Mail: info@shaker.de

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Technische und Numerische Mechanik der Universität Stuttgart. Mein besonderer Dank gilt dem Institutsleiter Herrn Prof. Dr.-Ing. Peter Eberhard für das mir entgegengebrachte Vertrauen, die vielfältige Unterstützung und die Übernahme des Hauptberichts. Ihm verdanke ich die schöne Zeit an einem Institut, dessen kreatives Umfeldes die Anfertigung dieser Arbeit erst ermöglichte. Mein herzlicher Dank gilt auch Herrn Prof. Dr.-Ing. Boris Lohmann für das Interesse an meiner Arbeit und die Übernahme des Mitberichts.

Meine Zeit am Institut wurde auch wesentlich durch meine Kolleginnen und Kollegen geprägt. Für die angenehme Arbeitsatmosphäre sowie die zahlreichen fachlichen und nichtfachlichen Diskussionen möchte ich mich an dieser Stelle herzlich bedanken. Ferner danke ich Herrn Dipl.-Ing. Florian Fleissner, Herrn Dipl.-Ing. Timo Gaugele und Herrn Dipl.-Ing. Christoph Henninger für viele interessante Gespräche und so manche außeruniversitäre Aktivität. Das gleiche gilt für Herrn Dipl.-Ing. Christian Breuninger, Frau Dipl.-Ing. Beate Muth, Herrn Dr.-Ing. Jens Pfister und Herrn Dipl.-Ing. Pascal Ziegler mit denen ich das Arbeitszimmer teilen durfte und die meine Zeit am Institut ebenfalls erheblich bereichert haben. Nicht zuletzt richtet sich mein Dank auch an Herrn Dipl.-Ing. Steffen Huber, Herrn Wilhelm Hermann, Herrn Christoph Kilian, M.Sc., Herrn Dipl.-Ing. Jürgen Sierts und Herrn Christian Simader, die in Form ihrer Studien- und Masterarbeiten einen wichtigen Beitrag zu dieser Arbeit geleistet haben.

Danken möchte ich weiterhin der Bosch-Rexroth AG für die finanzielle Förderung meiner Arbeit. Stellvertretend möchte ich hier Herrn Dr.-Ing. Martin Piechnick, Herrn Dr.-Ing. Oliver Lenord und Herrn Dipl.-Ing. Daniel Kanth nennen, die meiner Arbeit großes Interesse entgegenbrachten. Der enge Kontakt zu ihnen war für mich sehr wertvoll.

Meine Eltern ermöglichten mir mein Studium und boten mir immer Rückhalt und Beistand. Dafür danke ich ihnen herzlich. Zum erfolgreichen Abschluss meiner Arbeit hat nicht zuletzt auch meine Lebensgefährtin Carola Steinbauer beigetragen. Ihr danke ich für ihr Verständnis und ihre Unterstützung insbesondere auch in der letzten Phase meiner Arbeit.

München, im November 2007 Michael Lehner

# Inhalt

**Kurzfassung** **IX**

**Abstract** **XI**

**1 Einleitung** **1**

1.1 Stand der Technik und Literaturübersicht . . . . . 2

1.2 Ziel und Aufbau der Arbeit . . . . . 8

**2 Beschreibung freier Einzelkörper** **12**

2.1 Einige Grundlagen der Kontinuumsmechanik . . . . . 13

2.1.1 Kinematische Beschreibung . . . . . 13

2.1.2 Spannungsmaße . . . . . 15

2.1.3 Konstitutive Gleichungen . . . . . 16

2.1.4 Die Bewegungsgleichungen eines elastischen Körpers . . . . . 18

2.2 Die Methode der Finiten Elemente . . . . . 21

2.2.1 Der Approximationsansatz . . . . . 21

2.2.2 Die Finite Elemente Bewegungsgleichungen . . . . . 24

2.2.3 Berücksichtigung von Zwangsbedingungen . . . . . 26

2.3 Beschreibung endlicher Drehungen . . . . . 27

2.3.1 Darstellung durch Drehung um eine Achse . . . . . 28

2.3.2 Darstellung mit Hilfe von Elementardrehungen . . . . . 29

2.4 Kinematik freier Einzelkörper . . . . . 31

2.4.1 Zur Definition von Koordinatensystemen an materiellen Punkten . 31

2.4.2 Differentiation in bewegten Koordinatensystemen . . . . . 33

2.4.3 Bewegung materieller Punkte des elastischen Körpers . . . . . 34
2.4.4 Diskretisierung der kinematischen Beschreibung . . . . . 35
2.5 Kinetik freier Einzelkörper . . . . . 38
2.5.1 Das Prinzip der virtuellen Leistung . . . . . 38
2.5.2 Die Bewegungsgleichungen eines freien Einzelkörpers . . . . . 43
2.5.3 Ortsintegralmatrizen . . . . . 43
2.5.4 Zur Definition des Körperreferenzsystems . . . . . 45
2.5.5 Geometrische Steifigkeiten . . . . . 47
2.6 Nutzung von Finite Elemente Daten in der elastischen Mehrkörperdynamik 49
2.6.1 Auswertung der Ortsintegralmatrizen . . . . . 49
2.6.2 Auswertung der globalen Ansatzfunktionen . . . . . 54

**3 Gebundene Mehrkörpersysteme 56**
3.1 Topologie von Mehrkörpersystemen . . . . . 56
3.1.1 Der Graph eines Mehrkörpersystems . . . . . 56
3.1.2 Daten zur Repräsentation der Topologie . . . . . 57
3.2 Zwangsgleichungen . . . . . 58
3.2.1 Formulierung von Zwangsgleichungen . . . . . 59
3.2.2 Vektorraumstruktur der Zwangsgleichungen . . . . . 61
3.3 Kinematik der Relativbewegung . . . . . 62
3.3.1 Grundlegende Beziehungen . . . . . 64
3.3.2 Sekundäre Gelenke . . . . . 66
3.3.3 Primäre Gelenke . . . . . 67
3.4 Das Prinzip der virtuellen Leistung . . . . . 69
3.5 Formalismen für Mehrkörpersysteme . . . . . 72
3.5.1 Der rekursive Formalismus für Systeme mit Baumstruktur . . . . . 73
3.5.2 Erweiterung des rekursive Formalismus für Systeme mit Schleifenstruktur . . . . . 79
3.6 Beispiele . . . . . 82
3.6.1 Modifizierter Schubkurbeltrieb . . . . . 82
3.6.2 Reglermechanismus . . . . . 84

**4 Implementierung des Mehrkörpersimulationsmoduls 89**

4.1 Ausgewählte Aspekte des objektorientierten Entwurfs . . . . . 90

4.2 Einbindung in das CAE-System . . . . . 94

**5 Einige Grundlagen der Modellreduktion 96**

5.1 Matrizentheorie . . . . . 96

5.1.1 Matrix- und Vektornormen . . . . . 97

5.1.2 Eigen- und Singulärwertzerlegung . . . . . 98

5.2 Systemtheorie . . . . . 100

5.2.1 Darstellung von Systemen . . . . . 101

5.2.2 Stabilität, Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit . . . . . 103

5.2.3 Signal- und Systemnormen . . . . . 105

5.2.4 Gramsche Matrizen . . . . . 107

5.3 Modellreduktion mit Hilfe von Projektion . . . . . 109

**6 Verfahren der linearen Modellreduktion 112**

6.1 Verfahren auf Basis modaler Reduktion . . . . . 113

6.2 Balanciertes Abschneiden . . . . . 117

6.3 Krylov-Unterraummethoden . . . . . 120

6.3.1 Krylov-Unterräume und Moment-Matching . . . . . 121

6.3.2 Numerische Aspekte - Der Arnoldi-Algorithmus . . . . . 123

6.3.3 Möglichkeiten der Fehlerschätzung und adaptive Verfahren . . . . . 127

6.4 Proper Orthogonal Decomposition . . . . . 129

**7 Modellreduktion in elastischen Mehrkörpersystemen 132**

7.1 Anforderungen an ein Modellreduktionsverfahren . . . . . 133

7.1.1 Systeme zweiter Ordnung . . . . . 133

7.1.2 Elastische Mehrkörperdynamik . . . . . 134

7.2 Beispiele . . . . . 136

7.2.1 Kfz-Stabilisatorstab . . . . . 137

7.2.2 Halterung . . . . . 138

7.3 Krylov-Unterraummethoden . . . . . 139
7.3.1 Krylov-Unterräume zweiter Ordnung . . . . . 140
7.3.2 Generierung von Basen für Krylov-Unterräume zweiter Ordnung . . 143
7.3.3 Ungedämpfte und proportional gedämpfte Systeme . . . . . 148
7.3.4 Diskussion der Approximationseigenschaften . . . . . 152
7.4 Modellreduktion mit Hilfe Gramscher Matrizen . . . . . 155
7.4.1 Gramsche Matrizen für Systeme zweiter Ordnung . . . . . 155
7.4.2 Frequenzgewichtete Gramsche Matrizen zweiter Ordnung . . . . . 158
7.4.3 Definition der reduzierten Systeme . . . . . 160
7.4.4 Zur Abschätzung des Approximationsfehlers . . . . . 163
7.4.5 Möglichkeiten zur Berechnung bandbegrenzter Gramscher Matrizen 169
7.4.6 Diskussion der Approximationseigenschaften . . . . . 178
7.5 Zur Bewertung der Approximationseigenschaften im Zeitbereich . . . . . 188
7.5.1 Kfz-Stabilisatorstab . . . . . 188
7.5.2 Halterung . . . . . 190
7.6 Gegenüberstellung der untersuchten Reduktionsverfahren . . . . . 193

**8 Zur Implementierung des Modellreduktionsmoduls 197**
8.1 Klassen- und Datenstruktur . . . . . 197
8.2 Datenaustausch mit ANSYS . . . . . 203

**9 Zusammenfassung 205**

**Anhang 208**
A.1 ANSYS-Eingabedateien eines elastischen Balkens . . . . . 208
A.2 Auswertung der Gramschen Steuerbarkeitsmatrix . . . . . 211

**Literaturverzeichnis 213**

# Kurzfassung

Die numerische Simulation ist ein wichtiges Werkzeug bei der Entwicklung komplexer technischer Systeme. Maßgebliche Einflüsse auf die Weiterentwicklung der hierzu verwendeten Simulationsverfahren sind darin zu sehen, dass einerseits die gesamtheitliche Simulation von Komponenten aus verschiedenen Fachdisziplinen an Bedeutung gewinnt, andererseits aber auch immer höhere Anforderungen an die jeweiligen fachspezifischen Simulationswerkzeuge gestellt werden.

Die vorliegende Arbeit basiert auf Ergebnissen, die im Rahmen der Entwicklung eines Mehrkörpersimulationsmoduls als Bestandteil eines fachübergreifenden Simulationspakets erarbeitet wurden. Um die sich daraus ergebenden Anforderungen an die Softwarearchitektur erfüllen zu können, wird ein objektorientierter Ansatz verwendet, wodurch es auf einfache Weise möglich ist, das Modul in das übergeordnete Simulationssystem zu integrieren. Aber auch bei der Implementierung des Mehrkörpersimulationsmoduls selbst ergeben sich daraus Vorteile, wie beispielsweise anhand der gewählten Vorgehensweise zur Implementierung der Gelenkbibliothek gezeigt werden kann.

Da für manche Anwendungen die ausschließliche Beschränkung auf starre Körper bei der Mehrkörpersimulation nicht ausreicht, ist das neu entwickelte Modul in der Lage, auch elastische Strukturen zu berücksichtigen. Dies wird mit Hilfe der Methode des bewegten Bezugssystems realisiert, bei der die Bewegung des Körpers in die nichtlineare Bewegung eines körperbezogenen Referenzsystems und eine überlagerte, im Allgemeinen linearelastische Deformation aufgeteilt wird. Dieses Verfahren ermöglicht es u. a. auch, kommerzielle Finite Elemente Programme zur Beschreibung der flexiblen Substrukturen zu nutzen, wodurch auf die vielfältigen Modellierungsmöglichkeiten solcher Softwarepakete zurückgegriffen werden kann. Zur Erstellung der Bewegungsgleichungen des Gesamtsystems wird ein rekursiver Formalismus herangezogen, der es erlaubt, die explizite Form der Bewegungsgleichungen auf effiziente Weise zu berechnen.

Die mit Hilfe einer Finite Elemente Diskretisierung erhaltenen Modelle elastischer Körper besitzen jedoch häufig eine sehr große Anzahl an Freiheitsgraden. Eine effiziente Simulation elastischer Mehrkörpersysteme ist daher nur möglich, wenn leistungsfähige Modellreduktionsverfahren verfügbar sind.

Als Alternativen zu den in der Mehrkörperdynamik fast ausschließlich verwendeten Ver-

fahren auf Basis modaler Reduktion werden in der vorliegenden Arbeit Methoden vorgestellt, die ursprünglich für Anwendungen im Kontext der Kontrolltheorie entwickelt wurden und im Allgemeinen auf eine Approximation des Ein-/Ausgangsverhaltens von Systemen abzielen.

Eine solche Verfahrensgruppe sind die Krylov-Unterraummethoden, welche hier so modifiziert werden, dass eine Anwendung auf elastische Strukturen als Bestandteile von Mehrkörpersystemen möglich ist. Anhand von Beispielen kann gezeigt werden, dass sich damit sehr genaue reduzierte Modelle erzeugen lassen, falls nur wenige auf den Körper wirkende Lasten bei der Reduktion berücksichtigt werden müssen. Die sich dabei ergebenden Approximationsfehler im Frequenzbereich können dann um Größenordnungen kleiner sein als bei reduzierten Modellen gleicher Dimension, die mit Hilfe modaler Reduktion erhalten werden. Für den Fall, dass Modelle mit relativ vielen angreifenden Kräften reduziert werden sollen, müssen jedoch gewisse Einschränkungen bei der Anwendung dieser Methoden hingenommen werden.

Als ein alternatives Verfahren wird daher die Ordnungsreduktion unter Verwendung Gramscher Matrizen untersucht. Um bestimmte Frequenzbereiche bei der Reduktion betonen zu können, werden dabei bekannte Verfahren um frequenzgewichtete bzw. bandbegrenzte Varianten ergänzt. Wie anhand von Beispielen gezeigt werden kann, besitzen diese Methoden sehr günstige Approximationseigenschaften sowohl im Frequenz- als auch im Zeitbereich. Weiterhin lassen sich für bestimmte Ausprägungen der Verfahren Fehlerabschätzungen angegeben, die dazu beitragen können, den Reduktionsprozess zu vereinfachen. Neben dem gewünschten Frequenzband ist dann nur noch ein skalarer Wert vorzugeben, der die Approximationsgüte spezifiziert.

Anders als bei den Krylov-Unterraummethoden ist bei den Verfahren auf Basis Gramscher Matrizen eine direkte Anwendung auf Modelle sehr hoher Dimension kaum möglich. Es werden deshalb zwei Approximationsverfahren vorgeschlagen, die auf der Verwendung von Krylov-Unterräumen bzw. der so genannten Proper Orthogonal Decomposition beruhen und die Anwendung der Ordnungsreduktionsverfahren auf Basis Gramscher Matrizen auch auf große Systeme ermöglichen.

# Abstract

Numerical simulations are a major tool for the development of complex technical systems. The improvement of the corresponding simulation methods is significantly influenced by two main factors. One of them is the increasing importance of the combined simulation of components originating from different areas of application. The growing demands on the individual dedicated simulation tools themselves also play a key role.

This thesis is based on results obtained in the context of the development of a multibody simulation module which is part of a general purpose simulation package. In order to meet the resultant requirements concerning the software architecture, an object-oriented approach is selected. Hereby, the integration of the module into the superior simulation package can be achieved conveniently. Even the implementation of the multibody simulation module itself simplifies. This can be shown for example by means of the chosen procedure of implementing the joint library of the module.

For some applications, a restriction to the exclusive usage of rigid bodies for multibody simulations is not appropriate. Therefore, the newly developed module allows to consider flexible substructures. This is done by using the well-established floating frame of reference formulation which subdivides the flexible body's motion into the nonlinear reference motion and the usually linearised elastic deformation. The application of this technique permits the use of commercial finite elements software to describe the flexible substructure. Thereby, one can take advantage of the manifold modelling possibilities of such software packages. To generate the equations of motion of the whole system, a recursive formalism is used that constitutes an efficient way to compute the explicit representation of the equations of motion.

Using the finite elements method to describe flexible bodies usually leads to a large number of elastic coordinates. Hence, an efficient simulation of flexible multibody systems is only possible if powerful model reduction techniques are available.

Methods based on modal reduction are almost exclusively used in flexible multibody dynamics. In this thesis techniques originating from applications in the context of control theory are presented as alternatives. These approaches usually aim at approximating the input-output behaviour of systems.

One group of such methods are the Krylov-subspace techniques. These are modified so that an application to flexible bodies used as elements of multibody systems is feasible. Numerical examples show that very accurate reduced order models can be obtained if there is only a small number of loads acting on the body to be considered during the reduction procedure. The resulting approximation errors in the frequency domain can differ by magnitudes from those which occur when using reduced order models of the same dimension obtained by modal reduction. However, if models with a relatively large number of acting loads have to be reduced, this approach gets rather difficult to handle.

Thus, model reduction using Gramian matrices is investigated as an alternative method. To emphasise certain frequency ranges during the reduction process, established methods are supplemented by frequency-weighted versions. This approach has very good approximation capabilities in both time and frequency domain, which can be demonstrated by numerical examples. Additionally, for certain variants of these methods error bounds are available that can facilitate the model reduction procedure considerably. Besides the frequency range of interest, only a scalar factor has to be defined in order to specify the accuracy of the approximation.

In contrast to the Krylov-subspace techniques, the model reduction using Gramian matrices is hardly applicable to large-scale models in a direct way. Therefore, two approximation approaches are proposed that are based on the use of Krylov-subspaces and the so-called proper orthogonal decomposition, respectively. These approaches allow the application of the model reduction techniques based on Gramian matrices to large-scale systems.