B. Steffi Höse

Statistische Genauigkeit bei der simultanen Schätzung von Abhängigkeitsstrukturen und Ausfallwahrscheinlichkeiten in Kreditportfolios

2007

Berichte aus der Statistik

B. Steffi Höse

Statistische Genauigkeit bei der simultanen Schätzung von Abhängigkeitsstrukturen und Ausfallwahrscheinlichkeiten in Kreditportfolios

Shaker Verlag
Aachen 2007

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Zugl.: Dresden, Techn. Univ., Diss., 2007

Copyright Shaker Verlag 2007
Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8322-6291-4
ISSN 1619-0963

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen
Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9
Internet: www.shaker.de • E-Mail: info@shaker.de

Vorwort und Danksagung

Die vorliegende Arbeit zur Untersuchung der statistischen Genauigkeit bei der simultanen Schätzung von Abhängigkeitsstrukturen und Ausfallwahrscheinlichkeiten in Kreditportfolios entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin am Lehrstuhl für Quantitative Verfahren, insbesondere Statistik der Technischen Universität Dresden. Sie wurde unter demselben Titel an der Fakultät Wirtschaftswissenschaften der Technischen Universität Dresden als Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades Dr. rer. pol. eingereicht. Das Promotionsverfahren wurde am 27. April 2007 mit der Disputation erfolgreich beendet.

An dieser Stelle möchte ich mich zuerst für die Betreuung und die Begutachtung meiner Arbeit durch Herrn Prof. Dr. Stefan Huschens (Erstgutachter), Herrn Prof. Dr. Hermann Locarek-Junge (Zweitgutachter) und Herrn Prof. Dr. Rüdiger Frey (Drittgutachter) bedanken. Dabei gilt mein ganz besonderer Dank meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr. Stefan Huschens, dessen fachlicher Rat mir erst den Blick auf so manches statistische Detail eröffnet hat. Außerdem möchte ich meiner Kollegin Sigrid Masurat und meinen Kollegen Konstantin Vogl und Robert Wania für die gute Zusammenarbeit und wissenschaftliche Diskussion danken. Aber vor allem die Unterstützung und das Verständnis meines Mannes und meiner Eltern für meine Arbeit waren mir eine große Hilfe.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort und Danksagung **v**

Abbildungsverzeichnis **xi**

Tabellenverzeichnis **xiii**

Abkürzungs- und Symbolverzeichnis **xv**

1 Einleitung **1**
1.1 Zielsetzung und Abgrenzung 1
1.2 Aufbau 3

2 Verteilung des Kreditportfolioverlustes **5**
2.1 Definition des Kreditportfolioverlustes 5
2.1.1 Definition des Ausfallereignisses 8
2.1.2 Forderungshöhe bei Ausfall 9
2.1.3 Verlustquote bei Ausfall 9
2.1.4 Multivariate Verteilung der Ausfallvariablen 10
2.2 Ausfallwahrscheinlichkeit 11
2.3 Korrelation der Ausfallindikatoren 14
2.3.1 Korrelationskoeffizient und Alternativen 14
2.3.2 Ausfallkorrelation 16
2.4 Eigenschaften und Maßzahlen der Verlustverteilung 18
2.5 Einfluss der Abhängigkeitsstruktur auf die Verlustverteilung 23
2.5.1 Stochastische Unabhängigkeit 24
2.5.2 Abhängigkeit im Querschnitt 26
2.5.3 Abhängigkeit im Quer- und Längsschnitt 28

3 Bernoulli-Mischungsmodell **31**
3.1 Allgemeines Bernoulli-Mischungsmodell mit einer Bonitätsklasse 34

3.1.1 Verteilung der Ausfallindikatoren 35
3.1.2 Abhängigkeitsstruktur der Ausfallindikatoren 36
3.1.3 Verteilung der Anzahl der Ausfälle 37
3.1.4 Verlustverteilung 38
3.2 Allgemeines Bernoulli-Mischungsmodell mit mehreren Bonitätsklassen . . . 39
3.2.1 Verteilung der Ausfallindikatoren 40
3.2.2 Abhängigkeitsstruktur der Ausfallindikatoren 40
3.2.3 Verteilung der Anzahl der Ausfälle in den Bonitätsklassen 42
3.2.4 Verlustverteilung 44
3.3 Beta-Binomialmodell für homogene Portfolios 45
3.3.1 Modellannahmen 46
3.3.2 Bedingte und unbedingte Ausfallkorrelation 46
3.3.3 Beta-Binomialverteilung 49
3.4 Multivariates Probit-Normalmodell für inhomogene Portfolios 51
3.4.1 Definition und Eigenschaften der Probit-Normalverteilung 51
3.4.2 Exkurs: Die Copula 52
3.4.3 Multivariate Probit-Normalverteilung mit Normal-Copula 54
3.4.4 Korrelationen im multivariaten Probit-Normalmodell 59
3.5 Faktormodell als Spezialfall des allgemeinen Bernoulli-Mischungsmodells . . 61

4 Simultane Parameterschätzung im allgemeinen Bernoulli-Mischungsmodell 65
4.1 Begriffsdefinitionen und Annahmen 65
4.1.1 Begriffsdefinitionen 66
4.1.2 Annahmen 69
4.2 Parameterschätzung für eine Bonitätsklasse 71
4.2.1 Punkt- und Intervallschätzer nach der Momentenmethode 71
4.2.2 Punkt- und Intervallschätzer nach der Maximum-Likelihood-Methode 84
4.3 Parameterschätzung im Portfoliomodell mit mehreren Bonitätsklassen 89
4.3.1 Punkt- und Intervallschätzer nach der Momentenmethode 90
4.3.2 Punkt- und Intervallschätzer nach der Maximum-Likelihood-Methode 124
4.4 Implikationen für die Messung von Kreditrisiken 133
4.4.1 Vergleich der Punktschätzer 133
4.4.2 Diskussion der Intervallschätzer 136
4.4.3 Punkt- und Intervallschätzer der Eigenkapitalanforderung nach Basel II 140

5 Parameterschätzung im Beta-Binomialmodell 147
5.1 Schätzer nach der Momentenmethode 147
5.2 Schätzer nach der Maximum-Likelihood-Methode 149
5.2.1 Log-Likelihood-Funktion 149
5.2.2 Informationsmatrix für eine Beobachtung 150
5.3 Vergleich der Schätzmethoden am Datensatz 152
5.3.1 Verteilungen der Punktschätzer 154
5.3.2 Güteeigenschaften der Punktschätzer 158
5.3.3 Vergleich der Konfidenzintervalle und -regionen 160
5.3.4 Varianzen der asymptotischen Normalverteilungen 167
5.3.5 Asymptotische relative Effizienz 170
5.3.6 Punkt- und Intervallschätzer der Eigenkapitalanforderung nach Basel II 171
5.3.7 Auswirkungen der Schätzfehler auf ökonomisches Kapital und Expected Shortfall 173

6 Parameterschätzung im multivariaten Probit-Normalmodell 179
6.1 Schätzer nach der Momentenmethode 180
6.1.1 Punktschätzer 180
6.1.2 Asymptotische Konfidenzintervalle und -regionen 181
6.2 Punkt- und Intervallschätzer nach der Maximum-Likelihood-Methode 184
6.2.1 Approximation der Log-Likelihood-Funktion 185
6.2.2 IFM-Methode 188
6.2.3 Transformationsmethode 194
6.3 Vergleich der Schätzmethoden am Datensatz 199
6.3.1 Simuliertes synthetisches Portfolio 199
6.3.2 Verlustverteilung und Verteilung der Ausfallquote 202
6.3.3 Betrachtete Schätzmethoden 205
6.3.4 Verteilungen der Punktschätzer 206
6.3.5 Relative Quadratwurzelfehler der Punktschätzer 211
6.3.6 Vergleich der Konfidenzintervalle und -regionen 213

7 Zusammenfassung und Ausblick 225
7.1 Modell 225
7.2 Ergebnisse und Anwendungen 226
7.3 Verifikation durch Simulation 227

7.3.1 Beta-Binomialmodell für homogene Portfolios 227
7.3.2 Multivariates Probit-Normalmodell für inhomogene Portfolios 228
7.4 Erweiterungen und Ausblick 230

Literaturverzeichnis **233**

Abbildungsverzeichnis

2.1 Schranken für die Korrelation Bernoulli-verteilter Zufallsvariablen 18
2.2 Verlustverteilung bei stochastischer Unabhängigkeit 25
2.3 Verlustverteilung im Ein-Faktormodell bei Unabhängigkeit im Längsschnitt . 27
2.4 Verteilung des durchschnittlichen Verlustes im Ein-Faktormodell bei Abhängigkeit im Längsschnitt 29

3.1 Bedingte Ausfallkorrelation und -wahrscheinlichkeit im Beta-Binomialmodell 48
3.2 Innerklassen-Ausfallkorrelation im multivariaten Probit-Normalmodell 57
3.3 Interklassen-Ausfallkorrelation im multivariaten Probit-Normalmodell 60

4.1 Schätzintervalle für Bonitätskorrelation und Eigenkapitalanforderung nach Basel II 145

5.1 Wahrscheinlichkeitsfunktionen ausgewählter Beta-Binomialverteilungen . . . 153
5.2 Verteilungen der M1-Schätzer im Beta-Binomialmodell 155
5.3 Vergleich der Schätzwerte nach ML- und Momentenmethode im Beta-Binomialmodell 156
5.4 Normal-P-P-Diagramme für die Verteilungen der Schätzer im Beta-Binomialmodell 159
5.5 Vergleich der Schätzintervalle für p im Beta-Binomialmodell 161
5.6 Vergleich der Schätzintervalle für ϱ im Beta-Binomialmodell 162
5.7 Relative Überdeckungshäufigkeit der auf den M1-Schätzern beruhenden Schätzregionen im Beta-Binomialmodell 165
5.8 Relative Überdeckungshäufigkeit der auf den ML-Schätzern beruhenden Schätzregionen im Beta-Binomialmodell 166
5.9 Relative Überdeckungshäufigkeit der auf dem LV beruhenden Schätzregionen im Beta-Binomialmodell 166
5.10 Verteilungen der geschätzten Varianzen der asymptotischen Normalverteilungen im Beta-Binomialmodell 169

5.11 Asymptotische relative Effizienz der M1- bzgl. der ML-Schätzer im Beta-Binomialmodell . . . 170
5.12 Schätzintervalle für die Eigenkapitalanforderung nach Basel II im Beta-Binomialmodell . . . 172
5.13 Verteilungen der Schätzer für ökonomisches Kapital und Expected Shortfall im Beta-Binomialmodell . . . 175

6.1 Dichtefunktionen der stochastischen Ausfallwahrscheinlichkeiten im multivariaten Probit-Normalmodell . . . 201
6.2 Simulierte Verteilung der Ausfallquote und Approximation durch eine Probit-Normalverteilung . . . 204
6.3 Approximationsgüte der Probit-Normalverteilung . . . 205
6.4 Verteilungen der M3- und IFM-Schätzer für p_3 und γ_3 im multivariaten Probit-Normalmodell . . . 207
6.5 Verteilungen der Schätzer für $\varrho^{\mathsf{C}}_{34}$ und $\varrho^{\mathsf{C}}_{37}$ nach M3- und TF-Methode im multivariaten Probit-Normalmodell . . . 208
6.6 Quantile der Verteilungen der Schätzer für $\varrho^{\mathsf{C}}_{3s}$ mit $s = 1, 2, \ldots, R$ im multivariaten Probit-Normalmodell . . . 209
6.7 Relative Quantile der Verteilungen der Schätzer für p_r und γ_r im multivariaten Probit-Normalmodell . . . 210
6.8 Geschätzte relative Quadratwurzelfehler der Schätzer für p_r und γ_r im multivariaten Probit-Normalmodell . . . 212
6.9 Auf den Momentenschätzern beruhende Schätzintervalle für p_3 im multivariaten Probit-Normalmodell . . . 214
6.10 Normal-P-P-Diagramme für die Verteilungen der Momentenschätzer für p_r im multivariaten Probit-Normalmodell . . . 217
6.11 Simulierte bivariate Verteilungen der Momentenschätzer der erwarteten Ausfallwahrscheinlichkeiten im multivariaten Probit-Normalmodell . . . 218
6.12 Relative Überdeckungshäufigkeit der auf den M1-Schätzern beruhenden Schätzregionen für (p_6, γ_6) im multivariaten Probit-Normalmodell . . . 220
6.13 Relative Überdeckungshäufigkeit der auf den Transformationsschätzern beruhenden Schätzregionen für (p_3, γ_3) im multivariaten Probit-Normalmodell . . . 220
6.14 Auf den Transformationsschätzern beruhende Schätzintervalle für γ_3 im multivariaten Probit-Normalmodell . . . 222

Tabellenverzeichnis

2.1 Zweidimensionale Verteilung Bernoulli-verteilter Ausfallvariablen 16
2.2 Maßzahlen der Verlustverteilungen und deren approximierender Normalverteilungen in drei Abhängigkeitsszenarien 26

4.1 Vergleich der Güteeigenschaften der Punktschätzer im allgemeinen Bernoulli-Mischungsmodell 134

5.1 Ausgewählte Quantile der Verteilungen der ML- und Momentenschätzer im Beta-Binomialmodell 157
5.2 Geschätzte relative Quadratwurzelfehler der Schätzer im Beta-Binomialmodell 159
5.3 Werte der Lilliefors-Teststatistiken für die Verteilungen der Schätzer im Beta-Binomialmodell 160
5.4 Relative Überdeckungshäufigkeit der Schätzintervalle im Beta-Binomialmodell 163
5.5 Mittlere Breite der Schätzintervalle im Beta-Binomialmodell 164
5.6 Relative Überdeckungshäufigkeit des Punktes (p, ϱ) durch die Schätzregionen im Beta-Binomialmodell 167
5.7 Asymptotische Normalverteilungen im Beta-Binomialmodell 168
5.8 Relative Überdeckungshäufigkeit und mittlere Breite der Schätzintervalle für die Eigenkapitalanforderung nach Basel II im Beta-Binomialmodell 173
5.9 Ausgewählte Quantile der Verteilungen der Schätzer für ökonomisches Kapital und Expected Shortfall im Beta-Binomialmodell 176
5.10 Geschätzte relative Quadratwurzelfehler der Schätzer für ökonomisches Kapital und Expected Shortfall im Beta-Binomialmodell 177

6.1 Parameter im simulierten multivariaten Probit-Normalmodell 200
6.2 Ausfallkorrelationen im multivariaten Probit-Normalmodell 202
6.3 Auf der Matrixnorm basierende geschätzte relative Quadratwurzelfehler der Schätzer für $\mathbf{R}^{\mathrm{c}}$ im multivariaten Probit-Normalmodell 214

6.4 Mittlere Breite der auf den Momentenschätzern beruhenden Schätzintervalle für p_r im multivariaten Probit-Normalmodell 215
6.5 Relative Überdeckungshäufigkeit der auf den Momentenschätzern beruhenden Schätzintervalle für p_r im multivariaten Probit-Normalmodell 216
6.6 Relative Überdeckungshäufigkeit der auf den Momentenschätzern beruhenden Schätzregionen für $\mathbf{p}$ im multivariaten Probit-Normalmodell 219
6.7 Relative Überdeckungshäufigkeit der auf den Transformationsschätzern beruhenden Schätzregionen für (p_r, γ_r) im multivariaten Probit-Normalmodell . . 221
6.8 Mittlere Breite der auf den Transformationsschätzern beruhenden Schätzintervalle für γ_r im multivariaten Probit-Normalmodell 223
6.9 Relative Überdeckungshäufigkeit der auf den Transformationsschätzern beruhenden Schätzintervalle für γ_r im multivariaten Probit-Normalmodell 223

Abkürzungs- und Symbolverzeichnis

Abkürzungen

AML-Methode	approximative Maximum-Likelihood-Methode
AW	Ausfallwahrscheinlichkeit
bspw.	beispielsweise
bzgl.	bezüglich
bzw.	beziehungsweise
ca.	circa
d. h.	das heißt
DSGV	Deutscher Sparkassen- und Giroverband
f.	folgende
ff.	fortfolgende
IFM	*inference functions for margins*
i. i. d.	unabhängig und identisch verteilt
IRBA	*Internal Ratings-Based Approach*
KN	Konfidenzniveau
LV	Likelihood-Verhältnis
M1-Methode	Variante 1 der Momentenmethode
M2-Methode	Variante 2 der Momentenmethode
M3-Methode	Variante 3 der Momentenmethode
MC	Monte Carlo
ML	Maximum-Likelihood
PIT	*Point-in-Time*
S.	Seite
SI	Schätzintervall
TF-Methode	Transformationsmethode
TTC	*Through-the-Cycle*
unabh.	stochastisch unabhängig

vgl.	vergleiche
z. B.	zum Beispiel

Verzeichnis häufig verwendeter Symbole

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

$\mathrm{Beta}(\alpha, \beta)$	Betaverteilung mit Parametern α und β
$\mathrm{BetaBin}(N; \alpha, \beta)$	Beta-Binomialverteilung mit N und Parametern α und β
$\mathrm{Bin}(N; p)$	Binomialverteilung mit N und Parameter p
$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$	Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2
$\mathrm{N}_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$	h-dimensionale Normalverteilung mit Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu}$ und Varianz-Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$
$\mathrm{ProbitN}(p, \gamma)$	Probit-Normalverteilung mit Parametern p und γ
$\mathrm{W}_h(\boldsymbol{\Sigma}; T)$	h-dimensionale Wishart-Verteilung mit Skalenmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$ und T Freiheitsgraden

Quantile von Wahrscheinlichkeitsverteilungen

$\chi^2_{f,q}$	q-Quantil der Chiquadrat-Verteilung mit f Freiheitsgraden
z_q	q-Quantil der Standardnormalverteilung

Operatoren

$\mathbb{A}\mathrm{RE}$	asymptotische relative Effizienz
$\mathbb{C}\mathrm{orr}$	Korrelation
$\mathbb{C}\mathrm{ov}$	Kovarianz
$\mathbb{E}$	Erwartungswert
$\mathbb{E}\mathrm{C}_q$	ökonomisches Kapital einer Wahrscheinlichkeitsverteilung zum Niveau q
$\mathbb{E}\mathrm{S}_q$	Expected Shortfall einer Wahrscheinlichkeitsverteilung zum Niveau q
$\mathbb{R}\mathrm{RMSE}$	relativer Quadratwurzelfehler
$\mathbb{S}\mathrm{td}$	Standardabweichung
$\mathbb{V}$	Varianz
$\mathbb{V}\mathrm{aR}_q$	Value-at-Risk einer Wahrscheinlichkeitsverteilung zum Niveau q

Allgemeine statistische Notation

$\xrightarrow{f.s.}$	fast sichere Konvergenz
$\xrightarrow{P}$	Konvergenz in Wahrscheinlichkeit
$\xrightarrow{V}$	Konvergenz in Verteilung
$\mathbf{C}$	Copula
$\mathbf{C}_{nv}$	Normal-Copula

f_X	Wahrscheinlichkeits- oder Dichtefunktion der Zufallsvariablen X
F_X	Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X; auch als $F_X(\cdot;\boldsymbol{\theta})$, um anzudeuten, dass F_X eine Funktion des Parametervektors $\boldsymbol{\theta}$ ist
$F_X^{(-1)}$	verallgemeinerte inverse Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X
$\mathbf{F_X}$	multivariate Verteilungsfunktion des Zufallsvektors $\mathbf{X}$; auch als $\mathbf{F_X}(\cdot;\boldsymbol{\theta})$, um anzudeuten, dass $\mathbf{F_X}$ eine Funktion des Parametervektors $\boldsymbol{\theta}$ ist
ϕ	Dichtefunktion der Standardnormalverteilung
$\boldsymbol{\phi}_m(\cdot;\mathbf{R}^{\mathsf{C}})$	Dichtefunktion der m-dimensionalen Standardnormalverteilung mit Korrelationsmatrix $\mathbf{R}^{\mathsf{C}}$
Φ	Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung
Φ^{-1}	Inverse von Φ
$\boldsymbol{\Phi}_2(\cdot,\cdot;\rho)$	Verteilungsfunktion der bivariaten Standardnormalverteilung mit Korrelationsparameter ρ
$\boldsymbol{\Phi}_m(\cdot;\mathbf{R}^{\mathsf{C}})$	Verteilungsfunktion der m-dimensionalen Standardnormalverteilung mit Korrelationsmatrix $\mathbf{R}^{\mathsf{C}}$
$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})$	Fisher-Informationsmatrix einer Beobachtung für Parametervektor $\boldsymbol{\theta}$
l	Log-Likelihood-Funktion
$\mathbb{P}$	Wahrscheinlichkeit
q	Wahrscheinlichkeitsniveau
W_X	wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion von X

Allgemeine mathematische Notation

$\lVert\cdot\rVert$	Euklidische Norm eines Vektors
$\lVert\cdot\rVert_2$	Spektralnorm einer Matrix
$\lVert\cdot\rVert_F$	Frobeniusnorm einer Matrix
$[\cdot]^{-1}$	Inverse einer Matrix
$\mathbf{0}$	Nullvektor
$\mathbf{1}_{\{\cdot\}}(\cdot)$	Indikatorfunktion
$\mathbf{1}_t$	$(1\times t)$-Einsvektor
$\arg\max$	Argument des Maximums einer Funktion
B	Betafunktion
d	totales Differential
∂	partielle Ableitung
$\partial_u g(y_1,y_2,\ldots,y_h)$	erste partielle Ableitung der Funktion g nach ihrem u-ten Argument an der Stelle $(y_1,y_2,\ldots,y_h)\in\mathbb{R}^h$, $u\in\{1,2,\ldots,h\}$

$\det$	Determinante
$\operatorname*{diag}_{r=1}^{R}(x_r)$	$(R \times R)$-Diagonalmatrix mit x_r als r-tes Diagonalelement
Γ	Gammafunktion
$\mathcal{I}$	Einheitsmatrix
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen, $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen

Indizierung

h	Anzahl der unbekannten Parameter im jeweiligen Modell
N, N_t	Anzahl der Kreditnehmer im Kreditportfolio in Periode t
$N^{(r)}$, $N_t^{(r)}$	Anzahl der Kreditnehmer in Bonitätsklasse r und Periode t
R	Anzahl der Bonitätsklassen
T	Anzahl der Beobachtungsperioden

Zufallsvariablen, -vektoren und -matrizen

A_{tn}	Ausfallvariable des Kreditnehmers n in Periode t
A_t, $\left(A_t^{(r)}\right)$	zufällige Anzahl der Ausfälle im Portfolio (in Bonitätsklasse r) in Periode t mit Realisation k_t $\left(k_t^{(r)}\right)$
$\mathbf{A}$	$(T \times R)$-Zufallsmatrix der Anzahl der Ausfälle mit Realisation $\mathbf{k}$
B_{tn}	Bonitätsvariable des Kreditnehmers n in Periode t
L_{tn}	Verlustvariable des Kreditnehmers n in Periode t mit Realisation l_{tn}
L_t	Verlustvariable des Kreditportfolios in Periode t mit Realisation l_t
$\bar{L}_{(T)}$	zufälliger durchschnittlicher Portfolioverlust aus T Perioden
$\tilde{\pi}_t$, $(\tilde{\pi}_{tr})$	stochastische Ausfallwahrscheinlichkeit der Kreditnehmer im Portfolio (in Bonitätsklasse r) in Periode t mit Realisation π_t (π_{tr})
$\tilde{\boldsymbol{\pi}}_t$	R-dimensionaler Vektor der stochastischen Ausfallwahrscheinlichkeiten der Kreditnehmer in Periode t mit Realisation $\boldsymbol{\pi}_t$
$\tilde{\boldsymbol{\pi}}^{(T)}$	RT-dimensionaler Vektor aller stochastischen Ausfallwahrscheinlichkeiten mit Realisation $\boldsymbol{\pi}$
Q_t, $\left(Q_t^{(r)}\right)$	zufällige Ausfallquote der Kreditnehmer im Portfolio (in Bonitätsklasse r) in Periode t mit Realisation q_t $\left(q_t^{(r)}\right)$
$\mathbf{Q}_t$	Vektor der zufälligen Ausfallquoten der Kreditnehmer in Periode t mit Realisation $\mathbf{q}_t$
$\mathbf{Q}$	$(T \times R)$-Matrix aller zufälligen Ausfallquoten mit Realisation $\mathbf{q}$

Parameter

α, β	Parameter der betaverteilten einperiodischen Ausfallwahrscheinlichkeit
γ_r	Parameter der Probit-normalverteilten einperiodischen Ausfallwahrscheinlichkeit der Kreditnehmer in Bonitätsklasse r
$\boldsymbol{\gamma}$	Vektor $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_R)$
$h^{(rs)}$	Varianz der Grenzverteilung der normierten Momentenschätzer für σ_{rs} mit $r \neq s$
$\mathbf{H}^{(r,\mathsf{M1})}$, $\mathbf{H}^{(r,\mathsf{M2})}$, $\mathbf{H}^{(r,\mathsf{M3})}$, $\mathbf{H}^{(r,\mathsf{ML})}$	Varianz-Kovarianzmatrix der Grenzverteilung des normierten Parameterschätzvektors nach M1-, M2-, M3- bzw. ML-Methode in Bonitätsklasse r
$\mathbf{H}^{(\mathbf{p})}$, $\mathbf{H}^{(\mathbf{p},\mathsf{ML})}$	Varianz-Kovarianzmatrix der Grenzverteilung des normierten Momenten- bzw. ML-Schätzvektors für $\mathbf{p}$
$\mathbf{H}^{(\boldsymbol{\sigma})}$, $\mathbf{H}^{(\boldsymbol{\sigma},\mathsf{ML})}$	Varianz-Kovarianzmatrix der Grenzverteilung des normierten Momenten- bzw. ML-Schätzvektors für $\boldsymbol{\sigma}$
$\mu^{(r)}$, $\mu^{(rs)}$, $\mu^{(rrs)}$, $\mu^{(rrss)}$	gewöhnliche Momente bzw. Produktmomente um Null der einperiodischen Ausfallquoten der Kreditnehmer in den Bonitätsklassen r und s
$\boldsymbol{\mu}$, $(\boldsymbol{\mu}_r)$	Vektor der ersten zwei gewöhnlichen Momente der Ausfallquote der Kreditnehmer im Portfolio (in Bonitätsklasse r)
μ_1, μ_2	gewöhnliches Moment erster und zweiter Ordnung der Ausfallquote der Kreditnehmer im Portfolio
p_{tn}	Ausfallwahrscheinlichkeit des Kreditnehmers n in Periode t
p, (p_r)	Erwartungswert der stochastischen Ausfallwahrscheinlichkeit der Kreditnehmer im Portfolio (in Bonitätsklasse r)
$\mathbf{p}$	R-dimensionaler Vektor der erwarteten Ausfallwahrscheinlichkeiten
σ^2	Varianz der stochastischen Ausfallwahrscheinlichkeit der Kreditnehmer im Portfolio
σ_{rs}	Kovarianz der stochastischen Ausfallwahrscheinlichkeiten der Kreditnehmer in den Bonitätsklassen r und s
$\boldsymbol{\sigma}$	Vektor der Varianzen der stochastischen Ausfallwahrscheinlichkeiten
$\boldsymbol{\Sigma}$	$(R \times R)$-Varianz-Kovarianzmatrix der stochastischen Ausfallwahrscheinlichkeiten
$\mathbf{R}$	$(R \times R)$-Korrelationsmatrix der stochastischen Ausfallwahrscheinlichkeiten

$\mathbf{R}^{\mathsf{C}}$	Korrelationsmatrix der Normal-Copula
ϱ, ϱ_{rs}	Inner- und Interklassen-Ausfallkorrelation
$\varrho_{rs}^{\mathsf{AW}}$	Korrelation der stochastischen Ausfallwahrscheinlichkeiten der Kreditnehmer in den Bonitätsklassen r und s
ϱ_{r}^{B}	Bonitätskorrelation der Kreditnehmer in Bonitätsklasse r
$\varrho_{rs}^{\mathsf{C}}$	Element der Matrix $\mathbf{R}^{\mathsf{C}}$

Parameterschätzer

Die Parameterschätzer eines unbekannten Parameters θ werden mit $\hat{\theta}_T^{\mathsf{Schätzmethode}}$ bezeichnet. Die Anzahl T der zur Schätzung verwendeten Beobachtungen wird als Index tief und die Schätzmethode hoch gestellt. Als Schätzmethode werden in dieser Arbeit die Momentenmethode (Index: M) mit drei Varianten (Index: M1, M2, M3), die ML-Methode (Index: ML), die approximative ML-Methode (Index: AML), die IFM-Methode (Index: IFM) und die TF-Methode (Index: TF) betrachtet. Folgende Schätzer bilden die einzige Ausnahme von dieser Regel.

$M_T^{(r)}$, $M_T^{(rs)}$, $M_T^{(rrs)}$, $M_T^{(rrss)}$	empirische Momente der Ausfallquoten der Kreditnehmer in den Bonitätsklassen r und s mit Realisationen $m_T^{(\cdot)}$
$\mathbf{M}_T$, $(\mathbf{M}_{r,T})$	Vektor der ersten zwei Stichprobenmomente der Ausfallquote der Kreditnehmer im Portfolio (in Bonitätsklasse r) mit Realisation $\mathbf{m}_T$ $(\mathbf{m}_{r,T})$
$M_{1,T}$, $M_{2,T}$	Stichprobenmoment erster und zweiter Ordnung der Ausfallquote der Kreditnehmer im Portfolio mit Realisationen $m_{1,T}$ und $m_{2,T}$

Spezielle Notation

EAD_{tn}	Forderungshöhe bei Ausfall des Kreditnehmers n in Periode t
LGD_{tn}	Verlustquote bei Ausfall des Kreditnehmers n in Periode t
ν_t, (ν_{tn})	Verlustbeitrag aller Kreditnehmer (des Kreditnehmers n) in Periode t
r_t	Ratingfunktion in Periode t