Berichte aus der Mathematik

Andrea Blunck, Armin Herzer

Kettengeometrien

Eine Einführung

Shaker Verlag
Aachen 2005

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.ddb.de abrufbar.

Copyright Shaker Verlag 2005
Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 3-8322-4136-1
ISSN 0945-0882

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen
Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9
Internet: www.shaker.de • eMail: info@shaker.de

Le cœur a ses raisons,
que la raison ne connaît point . . .

Blaise Pascal

KETTENGEOMETRIEN

Eine Einführung

Andrea Blunck Armin Herzer

Einleitung

Kettengeometrien oder deren Verallgemeinerungen waren – zumindest in ihrer ebenen Form – unter verschiedenen Namen und Arten bekannt, und wurden im letzten Jahrhundert vielfältig erforscht. Erst Benz gelang es dann in seiner Monographie „Geometrie der Algebren“ [6], den verschiedenen Gestalten eine gemeinsame Struktur zu verleihen; es ergab sich so ein Lehrbuch, welches zugleich eine leicht zu bewältigende Einführung in dieses Teilgebiet der Geometrie unter reichlicher Anwendung algebraischer Methoden darstellte.

Inzwischen ist ein die Entwicklung in den darauffolgenden 15 Jahren einschließender Übersichtsartikel erschienen im Handbook of Incidence Geometry [41]. Aber diese Zusammenfassung setzt doch ein höheres Maß an Grundkenntnissen voraus, um sie genügend zu goutieren.

Mit unserem Buch wollen wir eine Lücke schließen, nämlich jemandem, der dieses faszinierende Gebiet der Geometrie kennenlernen will, ohne bereits allzuviel davon zu verstehen, einen Zugang eröffnen; wir bieten eben eine Einführung. Oder, um es nochmal in einem anderen Bild auszudrücken: Man möchte einen Berg erobern und beginnt dazu im Tal mit gewöhnlicher Wanderausrüstung. Der Weg beginnt auch ganz angenehm, allmählich wird er schwieriger, Wege zu Teilzielen zweigen ab. Vielleicht ist ein Gipfel am Ende auch nur mit besserer Ausrüstung erreichbar...

So wird in einem Kapitel 0 vorbereitend anhand der Möbiusebene als einem leicht einsehbaren und am ehesten bekannten Prototypen einer Kettengeometrie einmal durchexerziert, was an verschiedenen Aspekten, Fragestellungen und Vorgehensweisen später ganz allgemein auf Kettengeometrien bzw. deren Verallgemeinerungen angewandt wird.

Die Kapitel 1 und 2 bringen sukzessive und erklärend Teildefinitionen, bis am Ende der Begriff der Kettengeometrie wohlverstanden vor einem steht. Die algebraische Darstellung lehrt, dass derlei Dinge tatsächlich „in der Natur“ vorkommen, die angegebenen Eigenschaften als Inzidenzstruktur machen sie zu einem Gegenstand der Geometrie. Auch die affine Betrachtungsweise findet ihren Platz.

In den Kapiteln 3 und 4 kommen dann die diesem Gegenstand angemessenen klassischen Fragestellungen zum Zuge: Algebraische Beschreibung der Unterstrukturen („Unterräume“) bzw. Morphismen. Hierzu wird als zugehörige algebraische Struktur das Jordan-System, als zugehöriger Morphismus der Homotopismus erkannt.

Damit ist der Kernbereich der Theorie abgedeckt. Die weiteren Kapitel bringen Beispiele bzw. speziellere Fragestellungen; diese Kapitel können jeweils für sich durchgearbeitet wer-

den, nur für die Kapitel 10-12 ist gerade der durchgehende Zusammenhang beabsichtigt, und auch Kapitel 9 verwendet Begriffe und Ergebnisse aus Kapitel 8.

Übrigens: Will man sich nach der Lektüre von Kapitel 0-4 etwas „erholen“, so sei Kapitel 8 empfohlen. Die Sache ist dort systematisch einfacher sowie von einem anderen Gesichtspunkt her aufgebaut, dazu von vorneherein zuerst einmal affin und ohnehin kommutativ.

Ansonsten könnte man auch der Reihe nach fortfahren: Kapitel 5 behandelt in extenso das klassische Beispiel der Kettenräume auf Quadriken, Kapitel 6 bringt eine Charakterisierung der Kettengeometrien durch ihre Automorphismengruppe, hier allerdings der Einfachheit halber eingeschränkt auf den kommutativen Fall. Es beginnt mit einem ausführlichen Beweis des Satzes von Tits; Umgang mit Permutationsgruppen ist angesagt.

Ganz anders die Beschaffenheit von Kapitel 7, das mit freien Erweiterungen beginnt und danach Produkte bechreibt. Man könnte sagen: Geometrie im Gewand der Mengenlehre – und nur diese wird – außer im 4. Abschnitt – vorausgesetzt. Natürlich ist Erfahrung im Umgang mit solchen Dingen hilfreich, z.B., wenn man sich schon einmal die Konstruktion einer projektiven Ebene als freie Erweiterung eines Vierecks einverleibt hat.

Kapitel 9 hat als einziges nur ebene Strukturen (Kreisebenen) zum Gegenstand, weil nur so eine Charakterisierung durch die Gruppe der Projektivitäten möglich ist. Diese sollte aber einmal im Zusammenhang – wenn auch nur für Möbiusebenen – vorgeführt werden.

Nun noch etwas zum Block der Kapitel 10-12: Es geht um Antwort auf die Frage, ob es möglich sei, Kettengeometrien als Teil eines projektiven Raumes einleuchtend darzustellen, wie man es in Kapitel 0 für Möbiusebenen getan hat – oder wie es im affinen Fall endlicher Dimension bereits gelungen ist, Ketten als affine rationale Normkurven zu identifizieren.

Unter Beschränkung auf endliche Dimension n werden in Kapitel 10 Ketten als n-Reguli, in Kapitel 11 als rationale Normkurven einer Ordnung kleiner oder gleich n dargestellt, und in Kapitel 12 wird ausgeführt, welches algebraische Kalkül Produkte in projektiven Geometrien bechreibt. Natürlich werden hier etwas anspruchsvollere Hilfsmittel benötigt, wie das Graßmann- bzw. Tensorprodukt. Auch ist Erfahrung im Umgang mit projektiver Geometrie hilfreich; das 13. Kapitel kann dabei unterstützend wirken, weil dort die wichtigsten benötigten Grundbegriffe und Sätze der projektiven (und damit auch affinen) Geometrie zusammengestellt werden.

Welche Vorkenntnisse und Fähigkeiten sollte nun der Leser mitbringen? Die Fähigkeit, mit mathematischen Gegenständen sachgerecht umzugehen – alles Weitere erübrigt sich, möchte man sagen. Aber natürlich, Fähigkeiten und Kenntnisse erwirbt man sich am besten durch ein Anfängerstudium der Mathematik – oder eine Arbeitsgemeinschaft, die dieses Buch gemeinsam erschließt. Es gibt viele Zugänge zur Mathematik – einer davon ist hier, denn man kann nicht nur eine Vielzahl mathematischer Methoden kennenlernen, sondern zugleich ist eine Vielzahl mathematischer Teilgebiete involviert.

Natürlich sind Kenntnisse von (linearer) Algebra und Geometrie, wie sie in Anfängervorlesungen erworben werden, von großem Nutzen und erleichtern Fortschritte. Als einführende Lektüre (oder zum Nachschlagen) hat sich empfohlen: Für Geometrie [74, Bd. II], [8]. Für Algebra [65]. Sonst wird im Text auf entsprechende Literatur verwiesen, jedoch immer nach

dem Prinzip, dass man die Dinge möglichst aus sich heraus verstehen sollte – ohne anderes Schrifttum.

Eine Einführung stößt überall dort an Grenzen, wo im Grunde wieder ein neues Forschungsgebiet beginnt. Am Ende der Kapitel gibt es hie und da einen „Ausblick“. Vor allem drei Gebiete mussten ausgeklammert werden: 1. Die vielerlei Ergebnisse auf dem Gebiet der Kreisebenen (außer Kapitel 8). Näheres im Handbook of Incidence Geometry [22]. Diese Strukturen werden aber gern als besonders anschauliches Beispielmaterial herangezogen. 2. Die Verallgemeinerung auf höher dimensionale Strukturen, z.B. Burau-Geometrien, vgl. [41, Abschnitt 10], sowie die Dissertation von Karin Pieconkowski, Projektive Räume über Schiefkörperpaaren [67]. 3. Was passiert bei Paaren (K,R), R ein Ring, K ein Teilkörper, nicht im Zentrum von R, vgl. z.B. [15].

Die Anregung zur Erstellung eines solchen einführenden Lehrbuches wurde von PD Dr. Stefan E. Schmidt aufgrund der Oberseminare über zugehörige Themen an der Universität Mainz gegeben. Ihm sei an dieser Stelle für diese Anregung und Begleitung bei der Planung und Entstehung des Buches herzlich gedankt. Er hat auch die anschließenden „Bodensee-Seminare“ organisiert; in beiderlei Seminaren haben die Teilnehmer, größtenteils Doktoranden, zur Durchdringung des Stoffes viel beigetragen.

Die erste Autorin zeichnet verantwortlich für die Kapitel 0-6, der zweite Autor für die Kapitel 7-13 – selbstverständlich mit gegenseitigen Verbesserungsvorschlägen und möglichster Angleichung der Begriffe. Den Kapiteln 0-5 liegt eine Vorlesung zugrunde (WS 1998/99, Technische Universität Darmstadt). Spätere Kapitel haben jedenfalls zum Teil die Feuerprobe des Oberseminars bestanden.

Von den Dingen, die noch nicht in irgendwelchen Zeitschriften veröffentlicht wurden, seien erwähnt Kapitel 7, Abschnitt 1 sowie das Gesamtkonzept des Blockes Kapitel 10-12.

Wir danken Herrn Dr. Marco Möller (Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg) für die vortreffliche Erstellung der vielerlei Zeichnungen, die eine wichtige Hilfe zum Verständnis darstellen, ebenso Frau Christine Schneider (Sekretärin am Fachbereich Physik der Universität Konstanz) für die Erstellung der Kapitel 7-13 im LaTeX-Format. Andrea Blunck hat ihre Kapitel 0-6 selbst im LaTeX-Format erstellt und die Schlussredaktion übernommen. Das verdient großen Dank, zumal der zweite Autor (auch schon aus Gründen des Alters) dem LaTeX-Format völlig fremd und hilflos gegenübersteht; wie hätte sonst aus dem Buch etwas werden sollen?

In einer Zeit, in der Glaube und Wissenschaft noch nicht auseinandergefallen waren, konnte ein Johannes Kepler, Mathematiker und Theologe, sein Werk „Harmonice Mundi“ mit einem Dankgebet an den Schöpfer beschließen, der ihm diese Einblicke in seine Schöpfungsgeheimnisse geschenkt hatte. Das möchte ich – der zweite Autor – auf meine Weise wiederholen.

Hamburg / Bodman, den 10. Juni 2005

Inhaltsverzeichnis

0 Die reelle Möbiusebene **1**

1 Distanzräume und projektive Geraden über Ringen **7**
1.1 Definition und erste Beispiele 7
1.2 Ringe und Moduln 10
1.3 Die projektive Gerade über einem Ring 15
1.4 Die projektive Gerade über speziellen Ringklassen 19
1.5 Die projektive Gerade über einem Unterring 26

2 Kettenräume und Kettengeometrien über Algebren **31**
2.1 Kettengeometrien, Kettenräume 31
2.2 Eine Beispielklasse: Benzebenen 38
2.3 Endlichdimensionale Algebren 43
2.4 Starke Kettenräume 46
2.5 Affine Kettengeometrien 49

3 Kettenräume über Jordan-Systemen **59**
3.1 Unterräume, Jordan-Systeme 59
3.2 Unterräume von starken Kettengeometrien 69
3.3 Affine Kettengeometrien über Jordan-Systemen 72

4 Morphismen von Kettenräumen über Jordan-Systemen **77**
4.1 Beispiele 77
4.2 Homotopismen und induzierte Morphismen 79
4.3 Ein Darstellungssatz für Isomorphismen 85

5 Kettenräume auf Quadriken **93**
5.1 Quadriken und zugehörige Kettenräume 93

5.2 Ein Quadrikenmodell für Kettenräume $\Sigma(K, R)$ 98
5.3 Algebraische Beschreibung der Kettenräume $\Sigma(\mathfrak{Q})$ 104

6 Charakterisierungen mittels der Automorphismengruppe 113
6.1 Der Satz von Tits 113
6.2 Charakterisierung starker Kettengeometrien 119

7 Konstruktionen nichtklassischer Berührstrukturen 127
7.1 Freie Erweiterungen 127
7.2 Schwache Kettenräume über C 144
7.3 Der Minkowski-Fall 156
7.4 Eine andere Konstruktion von Berührstrukturen 170

8 Kettengeometrien über kommutativen K-Algebren 179
8.1 Eine Ähnlichkeitsgeometrie über A 179
8.2 Anwendungen des Doppelverhältnisses in $\Sigma(K, A)$ 188

9 Kreisebenen und ihre Projektivitätengruppe 195
9.1 Projektive Ebenen und ihre Projektivitätengruppe 195
9.2 Projektivitäten in Möbiusebenen 199
9.3 Projektivitäten in den Möbiusebenen $\Sigma(K, A)$ 203
9.4 Charakterisierung miquelscher Möbiusebenen 206
9.5 Von (P_3) zur klassischen Möbiusebene 209

10 Räume von n-Reguli 215
10.1 n-Reguli 215
10.2 Räume von n-Reguli als schwache Kettenräume 219
10.3 Die Kettenräume $\Sigma_K(U, J)$ 225
10.4 Die Automorphismen von $\Sigma_K(U, \mathrm{End}_K(U))$ 230
10.5 Reguläre Geradenmengen (der Fall $n = 2$) 235
10.6 Affine Räume von n-Reguli 243

11 Graßmannsche Kettengeometrien 253
11.1 Die äussere Algebra 253
11.2 Darstellung der n-Reguli auf $\mathfrak{G}_{2n,n}$ 256
11.3 Der affine Zugang 260
11.4 Die Plücker-Quadrik 264
11.5 Lineare Systeme von n-Räumen 268

12 Projektive Kettenräume und ihre Produkte **277**
12.1 Tensorprodukte von Vektorräumen 277
12.2 Produkte projektiver Punktmengen 282
12.3 Projektive Kettenräume 284
12.4 Produkte projektiver Darstellungen 286
12.5 Etwas über Mannigfaltigkeiten und ihre Dimension 290
12.6 Berühren von Ketten in projektiver Darstellung 293

13 Hilfsbetrachtungen aus der projektiven Geometrie **297**
13.1 Grundlagen 297
13.2 Rationale Kurven und Normkurven 305
13.3 Übergang zum Affinen 316

Literaturverzeichnis **325**

Index **330**