

**Flachheitsbasierter Entwurf von Mehrgrößenregelungen  
mittels  
linearer Differentialoperator Darstellungen**

Der Technischen Fakultät der  
Universität Erlangen-Nürnberg

zur Erlangung des Grades

DOKTOR-INGENIEUR

vorgelegt von

**Joachim Deutscher**

Erlangen 2004

Als Dissertation genehmigt von  
der Technischen Fakultät der  
Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der Einreichung: 30.07.2003  
Tag der Promotion: 03.12.2003  
Dekan: Prof. Dr. rer. nat. A. Winnacker  
Berichterstatter: Prof. Dr.-Ing. G. Roppenecker  
Prof. Dr.-Ing. B. Lohmann

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Regelungstechnik der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg.

Herrn Professor Dr.-Ing. G. Roppenecker, dem Leiter des Lehrstuhls, danke ich für die Betreuung der Arbeit.

Mein Dank gilt auch Herrn Professor Dr.-Ing. B. Lohmann für die Übernahme des Korreferates.

Allen Kolleginnen und Kollegen, die mich bei meiner Arbeit unterstützt haben, möchte ich an dieser Stelle meinen Dank aussprechen. Besonders erwähne ich die Hilfe von Herrn Dr.-Ing. P. Hippe, der mich in das interessante Gebiet des Reglerentwurfs mit Polynommatrizen eingeführt hat. Für die kritische Durchsicht des Manuskripts möchte ich mich bei Herrn Dipl.-Ing. Johann Reger, Herrn Dipl.-Ing. Felix Anritter und bei meinem Vater bedanken.

Erlangen, im Juli 2003

Joachim Deutscher

## Kurzzusammenfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt den Entwurf von linearen und nichtlinearen Mehrgrößensystemen in Differentialoperatordarstellung. Für lineare Systeme wird ein parametrisches Regelentwurfverfahren entwickelt, das die Pole und Polrichtungen der Regelung als Entwurfsparameter verwendet. Mit ihnen lassen sich sowohl Rückführungen für Systeme in Differentialoperatordarstellungen als auch reduzierte Beobachter im Frequenzbereich parametrieren. Verknüpfende Beziehungen zwischen den Entwurfsparametern der Vollständigen Modalen Synthese (VMS) und den Polen sowie den Polrichtungen erlauben es, bekannte Ergebnisse der VMS von Zustandsregelungen auf den Reglerentwurf mit Differentialoperatordarstellungen zu übertragen und umgekehrt. Die Leistungsfähigkeit der neu entwickelten Entwurfsmethodik wird anschließend anhand von zwei Entwurfsproblemen demonstriert. Zuerst wird der Entkopplungsentwurf von Mehrgrößenregelungen behandelt. Als zweite Problemstellung wird der parametrische Entwurf von  $H_\infty$ -Filtern im Frequenzbereich betrachtet. Dabei wird sowohl der Entwurf von Filtern voller Ordnung als auch der Entwurf von Filtern reduzierter Ordnung untersucht. Durch die Formulierung von Entwurfsvorschriften für die Pole und Polrichtungen zur Lösung des  $H_\infty$ -Filterproblems im Frequenzbereich kann die bisher notwendige  $J$ -spektrale Faktorisierung von Polynommatrizen umgangen und durch die Bestimmung der optimalen Pole und Polrichtungen ersetzt werden. Im letzten Teil der Arbeit wird die flachheitsbasierte Folgeregelung für nichtlineare Systeme auf lineare Systeme übertragen. Dabei kann der lineare Entwurf mittels Differentialoperatordarstellungen in völliger Analogie zum nichtlinearen Fall entwickelt werden. Die auf diese Weise abgeleitete Methodik zum linearen flachheitsbasierten Folgereglerentwurf wird für die Anwendung auf nichtlineare Systeme übertragen. Durch eine Linearisierung des nichtlinearen Systems entlang der Solltrajektorie erhält man unmittelbar eine zeitvariante Differentialoperatordarstellung als lineare Systembeschreibung, auf die sich direkt die Ergebnisse zum linearen Folgereglerentwurf anwenden lassen. Diese neue Vorgehensweise bei der Folgeregelung nichtlinearer Systeme vereinfacht die Durchführung des Entwurfs und erleichtert gleichzeitig die Realisierung des resultierenden Folgereglers, der eine lineare zeitvariante Struktur aufweist. Damit werden in dieser Arbeit die Grundlagen geschaffen, mit dem linearen Folgeregler weiterführende Anforderungen an die Folgeregelung — wie z.B. Robustheitseigenschaften — mit den bewährten Werkzeugen der linearen Systemtheorie zu erfüllen.

## Abstract

This thesis considers the design of linear and nonlinear multivariable systems in differential operator representation. A parametric design procedure is introduced for linear systems, that uses the poles and the pole directions as design parameters. With the aid of these design variables feedback controllers for systems in differential operator representation as well as reduced order observers are parameterized in the frequency domain. Connecting relations between the design parameters of the parametric approach for state feedback design and the poles and pole directions are established, such that the results of one approach can be made available for the other and vice versa. The usefulness of the new parametric approach is demonstrated by solving the input-output decoupling problem for multivariable linear systems and by designing reduced order  $H_\infty$ -filters. The proposed parametric design of  $H_\infty$ -filters has the advantage that the  $J$ -spectral factorization of polynomial matrices can be circumvented by computing the optimal filter poles and the optimal pole directions. The last part of the thesis extends the flatness based design of tracking controllers to linear systems in differential operator representation. By using a linearization about the reference trajectory the results for linear systems can be applied to the design of tracking controllers for nonlinear systems. This approach facilitates the design and implementation of the resulting tracking controller. Enabling the use of linear system theory tools the proposed linear design of tracking controllers for nonlinear systems establishes a basis for satisfying further design objectives.

*Diese Arbeit ist dem Andenken an meine Großeltern gewidmet.*

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Problemstellung und Zielsetzung der Arbeit . . . . .	1
1.2	Aufbau der Arbeit . . . . .	3
1.3	Beiträge der Arbeit . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Differentialoperatordarstellung linearer Mehrgrößensysteme</b>	<b>7</b>
2.1	Flachheit linearer Systeme . . . . .	10
2.1.1	Definition flacher Systeme . . . . .	10
2.1.2	Bestimmung eines flachen Ausgangs . . . . .	12
2.2	Die rechte Differentialoperatordarstellung . . . . .	16
2.3	Beispiele zur rechten Differentialoperatordarstellung . . . . .	20
2.4	Linke Differentialoperatordarstellung . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Regelung linearer Mehrgrößensysteme in Differentialoperatordarstellung</b>	<b>30</b>
3.1	Flache Rückführungen . . . . .	31
3.2	Realisierung flacher Rückführungen durch Zustandsrückführungen . . . . .	33
3.3	Realisierung flacher Rückführungen durch dynamische Ausgangsrückführungen . . . . .	35
3.3.1	Bestimmung der dynamischen Ausgangsrückführung . . . . .	35
3.3.2	Separationseigenschaft der dynamischen Ausgangsrückführung . . . . .	37

3.4	Regelungsentwurf im Frequenzbereich . . . . .	38
3.5	Beispiele . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Parametrische Darstellung flacher Rückführungen und reduzierter Beobachter</b>	<b>44</b>
4.1	Parametrierungsformel für Zustandsrückführungen - Vollständige Modale Synthese	46
4.2	Parametrierungsformel für flache Rückführungen . . . . .	49
4.2.1	Definition der Polrichtungen der Regelung . . . . .	52
4.2.2	Herleitung der Parametrierungsformel der Regelung . . . . .	52
4.2.3	Gültigkeitsbereich der Parametrierungsformel und Verallgemeinerungsmöglichkeiten . . . . .	56
4.2.4	Beziehungen zwischen der Vollständigen Modalen Synthese und der Parametrierung durch Pole und Polrichtungen . . . . .	57
4.2.4.1	Zusammenhang zwischen Polrichtungen und Regelungseigenvektoren . . . . .	58
4.2.4.2	Zusammenhang zwischen Polrichtungen und invarianten Parametervektoren . . . . .	60
4.2.4.3	Parametrierung von Zustandsrückführungen durch Pole und Polrichtungen . . . . .	61
4.2.5	Beispiel . . . . .	61
4.3	Parametrierung reduzierter Beobachter . . . . .	64
4.3.1	Zeit- und Frequenzbereichsdarstellung reduzierter Beobachter . . . . .	64
4.3.2	Parametrischer Entwurf reduzierter Beobachter im Frequenzbereich . . . . .	73
4.3.2.1	Definition der Polrichtungen des Beobachters . . . . .	73
4.3.2.2	Herleitung der Parametrierungsformel des Beobachters . . . . .	74
4.3.2.3	Zusammenhang zwischen Polrichtungen und Linkseigenvektoren des Beobachters . . . . .	77
4.3.2.4	Parametrierung der Beobachtermatrizen durch Pole und Polrichtungen . . . . .	79

---

4.3.3	Parametrischer Entwurf reduzierter Beobachter im Zeitbereich . . . . .	80
4.3.4	Beispiele . . . . .	87
<b>5</b>	<b>Regler- und Beobachterentwurf unter Verwendung der Pole und Polrichtungen</b>	<b>93</b>
5.1	Vollständige und teilweise Führungsentkopplung . . . . .	94
5.1.1	Vollständige Führungsentkopplung . . . . .	94
5.1.2	Teilweise Führungsentkopplung . . . . .	106
5.1.2.1	Nichtminimalphasige Systeme . . . . .	106
5.1.2.2	Nicht entkoppelbare Systeme . . . . .	111
5.1.2.3	Nichtminimalphasige und nicht entkoppelbare Systeme . . . . .	114
5.1.3	Entwurfsschritte beim Entkopplungsentwurf und Anmerkungen . . . . .	115
5.1.4	Beispiel . . . . .	117
5.2	Entwurf reduzierter $H_\infty$ -Filter . . . . .	121
5.2.1	Problemstellung . . . . .	123
5.2.2	Parametrischer Entwurf des $H_\infty$ -Filters voller Ordnung . . . . .	126
5.2.3	Parametrischer Entwurf des $H_\infty$ -Filters reduzierter Ordnung . . . . .	132
5.2.4	Beispiel . . . . .	141
<b>6</b>	<b>Flachheitsbasierte Folgeregelung mittels linearer Differentialoperatordarstellungen</b>	<b>144</b>
6.1	Flachheitsbasierte Folgeregelung linearer Systeme . . . . .	146
6.1.1	Flachheitsbasierte Steuerung . . . . .	147
6.1.2	Stabile Folgeregelung durch flache Rückführung . . . . .	149
6.1.3	Stabile Folgeregelung durch dynamische Ausgangsrückführung . . . . .	153
6.1.4	Entwurfsschritte zur Lösung des Trajektorienfolgeproblems . . . . .	154
6.1.5	Beispiel . . . . .	155
6.2	Flachheitsbasierte Folgeregelung nichtlinearer Systeme . . . . .	166

6.2.1	Bestimmung der Differentialoperatordarstellung durch Linearisierung entlang der Solltrajektorie . . . . .	166
6.2.2	Stabile Folgeregelung durch flache zeitvariante Rückführung . . . . .	169
6.2.3	Stabile Folgeregelung durch dynamische Ausgangsrückführung . . . . .	171
6.2.4	Beispiel . . . . .	173
<b>7</b>	<b>Abschließende Betrachtungen</b>	<b>182</b>
	<b>Literatur</b>	<b>188</b>