**ANWENDUNGEN DER
DISKRETEN FOURIER-TRANSFORMATION
ZUR ENTWICKLUNG NUMERISCHER ALGORITHMEN
IN DER MIKROMECHANIK**

zur Erlangung des akademischen Grades eines
DOKTORS DER INGENIEURWISSENSCHAFTEN (Dr.-Ing.)
der Fakultät für Maschinenbau
der Universität Paderborn

genehmigte
DISSERTATION

von
Dipl.-Math. Stefan Neumann
aus Isselhorst

Tag des Kolloquiums: 25.09.2003
Referent: Prof. Dr. rer. nat. K.P. Herrmann
Korreferent: Prof. Dr. rer. nat. W.H. Müller

Berichte aus der Mikromechanik

Stefan Neumann

**Anwendungen der diskreten Fourier-Transformation
zur Entwicklung numerischer Algorithmen
in der Mikromechanik**

D 466 (Diss. Universität Paderborn)

Shaker Verlag
Aachen 2004

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Zugl.: Paderborn, Univ., Diss., 2003

Copyright Shaker Verlag 2004

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 3-8322-2455-6

ISSN 0947-2398

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen

Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9

Internet: www.shaker.de • eMail: info@shaker.de

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Laboratorium für Technische Mechanik der Fakultät für Maschinenbau der Universität Paderborn.

Herrn Prof. Dr. rer. nat. K.P. Herrmann danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit sowie seine stete fachliche Betreuung und Förderung.

Herrn Prof. Dr. rer. nat. W.H. Müller möchte ich für seinen außerordentlichen Einsatz danken, mich durch fachliche Diskussionen zu unterstützen und das Korreferat zu übernehmen.

Daneben bin allen zu Dank verpflichtet, die mich beim Gelingen dieser Arbeit unterstützt haben. Ganz besonders hervorheben möchte ich dabei meine Familie.

Paderborn, im November 2003

Stefan Neumann

Inhalt

Häufig verwendete Abkürzungen und Symbole	5
1 Einleitung	7
1.1 Die Rolle des Spannungs-Dehnungsverhaltens bei Kompositen	7
1.2 Zur RVE-Technik in der Mikro-Makromechanik	8
1.3 Die Bedeutung der DFT bei der Homogenisierung	10
1.4 Wegweiser durch die Arbeit	11
2 Grundlagen zu den numerischen Verfahren	13
2.1 Zu den Differenzenverfahren	13
2.1.1 Einführende Bemerkungen	13
2.1.2 Einführung der Diskretisierung	14
2.1.3 Die Methode der unbestimmten Koeffizienten im 2-D-Fall	15
2.1.4 Die verschiedenen Differenzenquotienten im 3-D-Fall	20
2.2 Grundlagen der diskreten FOURIER-Transformation	24
2.2.1 Definitionen der DFT und der IDFT	24
2.2.2 Eigenschaften der diskreten FOURIER-Transformation	25
3 Grundlagen der Linearen Elastizitätstheorie	31
3.1 Allgemeine Problemstellung	31
3.2 Grundgleichungen der Linearen Elastizitätstheorie	32
3.3 Formulierung des äquivalenten homogenen Problems	34
3.4 Die Gleichungen in VOIGT-Notation	37
4 Anwendung der DFT zur Lösung des Ersatzproblems	39
4.1 Konstruktion der Differenzgleichungen	39
4.2 Lösung der Differenzgleichungen vermöge DFT	40
4.3 Weitere Anmerkungen	43

5	Iterative Algorithmen zur Verzerrungsberechnung	45
5.1	Der Basis-Algorithmus.....	45
5.1.1	Herleitung des Basis-Algorithmus.....	45
5.1.2	Anmerkungen zum Konvergenzverhalten.....	47
5.1.3	Zur Festlegung des Hilfsmaterials	48
5.1.4	Die 1. Wahl der Festlegung von C^H bei der Basis-Gleichung.....	49
5.1.5	Die 2. Wahl der Festlegung von C^H bei der Basis-Gleichung.....	49
5.2	Der MILTON-Algorithmus.....	50
5.2.1	Herleitung des MILTON-Algorithmus.....	50
5.2.2	Festlegung von C^H bei der MILTON-Gleichung	53
6	Berechnung von Spannungsintensitätsfaktoren bei Rissen.....	55
6.1	Zur linear-elastischen Bruchmechanik.....	55
6.2	Einteilung der Rissöffnungen und Belastungsarten.....	55
6.3	Spannungsintensitätsfaktoren	56
6.4	Bestimmung von Spannungsintensitätsfaktoren.....	57
7	Verifikation der numerischen Verfahren	59
7.1	Anmerkungen zu den 2-D-Problemen	59
7.2	Vergleich der DFQ-Versionen.....	59
7.2.1	Elliptische Löcher als Referenzproblem: Quantitative Vergleiche	60
7.2.2	Vergleich der Rechenlaufzeiten	69
7.3	Vergleich der Funktionalgleichungen bei isotropen Materialien.....	69
7.3.1	Zum Einfluss der Elastizitätsmoduli	70
7.3.2	Zum Einfluss der Querdehnzahlen.....	77
7.4	Berechnung von Spannungsintensitätsfaktoren.....	81
7.4.1	Riss ausgehend von einem kreisförmigen Loch	83
7.4.2	Riss ausgehend von einem elliptischen Loch	84

8 Zusammenfassung	85
9 Anhang	87
9.1 Die Komponenten des Elastizitätstensors in VOIGT-Notation	87
9.1.1 Für isotropes Materialverhalten	87
9.1.2 Für kubisch anisotropes Materialverhalten	87
9.2 Das Mathematica-Sheet zur Berechnung von Differenzenausdrücken	88
9.3 Die Komponenten von $\hat{\mathbf{A}}$ für kubisch anisotropes Material.....	94
9.4 Die Winkelverteilungen gemäß dem Reihenansatz nach WILLIAMS	96
10 Literatur.....	97
11 Lebenslauf	103