

# **Analyse und Synthese nichtlinearer Regelungen mittels Sum-of-Squares-Programmierung**

Der Technischen Fakultät der  
Universität Erlangen-Nürnberg

zur Erlangung des Grades

DOKTOR-INGENIEUR

vorgelegt von

Dipl.-Ing. Markus Bäuml

Erlangen 2011

Als Dissertation genehmigt von  
der Technischen Fakultät der  
Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der Einreichung:	04.11.2011
Tag der Promotion:	25.01.2012
Dekan:	Prof. Dr.-Ing. habil. M. Merklein
Berichterstatter:	PD Dr.-Ing. habil. J. Deutscher Prof. Dr.-Ing. habil. B. Lohmann

Berichte aus der Steuerungs- und Regelungstechnik

**Markus Bäuml**

**Analyse und Synthese nichtlinearer Regelungen  
mittels Sum-of-Squares-Programmierung**

D 29 (Diss. Universität Erlangen-Nürnberg)

Shaker Verlag  
Aachen 2012

**Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Zugl.: Erlangen-Nürnberg, Univ., Diss., 2012

Copyright Shaker Verlag 2012

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-0911-8

ISSN 0945-1005

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen

Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9

Internet: [www.shaker.de](http://www.shaker.de) • E-Mail: [info@shaker.de](mailto:info@shaker.de)

---

# Danksagung

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Regelungstechnik der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg.

Allen voran möchte ich mich herzlich bei meinem Doktorvater Herrn PD Dr.-Ing. habil. Joachim Deutscher bedanken, der die Arbeit engagiert begleitet, seinen Erfahrungsschatz jederzeit geteilt und in vielen Diskussionen zu Ideen angeregt hat.

Weiterhin möchte ich Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Günter Roppenecker, dem Leiter des Lehrstuhls für Regelungstechnik, für dessen Unterstützung sowie die Mitwirkung im Prüfungskollegium meinen Dank aussprechen. Ebenso möchte ich Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Boris Lohmann für die Übernahme des Korreferates danken. Gedankt sei auch Herrn Prof. Dr. habil. Johannes Jahn, der als fachfremdes Prüfungsmitglied an meinem Promotionsverfahren mitgewirkt hat.

Auch möchte ich allen Kollegen und Kolleginnen vom Lehrstuhl für Regelungstechnik meinen Dank aussprechen. Das angenehme Arbeitsklima und die vielen fachlichen als auch privaten Gespräche haben sicherlich sehr zum Gelingen der Arbeit beigetragen. Mein besonderer Dank gilt meinem Freund und Kollegen Herrn Dr.-Ing. Bernhard Müller für seine kritische Durchsicht des Manuskripts sowie die daraus hervorgegangenen Anregungen. Auch möchte ich nicht vergessen, die Studenten dankend zu erwähnen, die mit Studien- und Diplomarbeiten Beiträge zu dieser Arbeit geleistet haben.

Abschließend möchte ich mich herzlich bei meinen Freunden und meiner Familie bedanken, welche mich in den vergangenen Jahren stets unterstützt und motiviert sowie die notwendigen Freiräume gegeben haben.

Der wichtigste Dank gilt an dieser Stelle meinen Eltern, denn ihre stete Unterstützung und Aufmunterung waren ein wichtiger Bestandteil, der zum Gelingen diese Arbeit unerlässlich war.

Erlangen, im März 2012

Markus Bäuml



---

# Kurzzusammenfassung

Gegenstand dieser Arbeit ist die Analyse und Synthese nichtlinearer Regelungen mit Hilfe der Sum-of-Squares-Programmierung (kurz: SOS-Programmierung). Die Letztere erlaubt einen Optimierungsansatz, der eine Lyapunov-Funktion und beim Reglerentwurf auch ein nichtlineares Stellgesetz unter der Maxime einer möglichst großen Abschätzung des Einzugsbereichs einer asymptotisch stabilen Ruhelage systematisch ermittelt.

Ein Problem bei den bisherigen Ansätzen mit dieser Methodik war, dass lediglich Systembeschreibungen gestattet waren, deren nichtlineare Ausdrücke aus polynomialen Funktionen bestehen. In der vorliegenden Arbeit wird die Anwendbarkeit der SOS-Programmierung auf die allgemeinere nichtlineare Systemklasse erweitert, deren Zustandsraumdarstellung mit Hilfe von Funktionen mit hinreichender Differenzierbarkeit angegeben werden kann. Dies wird über eine polynomiale Approximation der nicht-polynomialen Systembeschreibung erreicht. Durch die Einführung eines Approximationsfehlers und die geschickte Integration einer Zusatzbedingung im Rahmen der SOS-Programmierung ist sichergestellt, dass die auf Basis der polynomialen Näherung bestimmte Abschätzung des Einzugsbereichs auch für das Originalsystem gültig bleibt.

Um praxisnahen Randbedingungen gerecht zu werden, wird die Berücksichtigung von Stellsignal- und Zustandsbeschränkungen, die jedes reale System aufweist, mit in die Analyse- und Syntheseverfahren integriert. Damit bietet sich der Vorteil, dass eine aufwändige simulative Untersuchung zur Einhaltung der Begrenzungen entfallen kann.

Des Weiteren wird im Hinblick auf eine praktische Umsetzung der Regelung der Entwurf von Ausgangsrückführungen näher betrachtet. Um die Erhöhung der Systemordnung durch einen Beobachter zu vermeiden, welche die Berechnung einer gültigen Lyapunov-Funktion für das Gesamtsystem erheblich erschwert, wird die direkte Bestimmung einer statischen bzw. dynamischen Ausgangsrückführung mit Hilfe der SOS-Programmierung vorgeschlagen. Durch die Wahl einer freien Struktur verbleiben der Optimierung auf diese Weise mehr Freiheitsgrade als bei beobachterbasierten Ansätzen.

Begleitend zu der Einführung der Analyse- und Syntheseansätze wird ein akademisches Beispiel zur Verdeutlichung der Methodik eingesetzt. Abschließend erfolgt der Reglerentwurf für das aus der Literatur bekannte Modell eines Rührkesselreaktors. Darüber hinaus wird zur Demonstration der praktischen Umsetzbarkeit der präsentierten Verfahren eine dynamische Ausgangsrückführung für das Laborexperiment Inverses Pendel vorgestellt.





---

# Abstract

This thesis considers the analysis and synthesis of nonlinear control systems using Sum-of-Squares-programming (abbr.: SOS-programming). The latter method allows to formulate optimization procedures which compute systematically a Lyapunov function a nonlinear control law that maximizes an estimation of the region of attraction of an asymptotically stable equilibrium point.

The approaches of preceding contributions are restricted to systems with a description containing only polynomial nonlinearities. The present work proposes an extension of the SOS-programming procedure which allows to handle all systems that can be written in state-space form using general nonlinear functions, which are sufficiently differentiable. To this end, a polynomial approximation of the non-polynomial system is needed. Introducing an approximation error and integrating an additional condition into the SOS-programming ensures that the lower bound of the region of attraction estimated on basis of the polynomial approximation is also valid for the original system.

Furthermore, it is shown how input and state saturations can be incorporated into the analysis and synthesis techniques. This is highly relevant for practical applications, since these restrictions exist for all real systems. By means of the proposed integration of limitations into the design process, no expensive simulation studies are necessary to check the compliance of these saturations.

The design of output feedback is considered to allow the practical implementation of the control law. To avoid the increase in the system order implied by any observer-based technique, which complicates the computation of a valid Lyapunov function for the overall system, the direct calculation of a static or dynamic output feedback is proposed. Choosing a free structure of the additional dynamics ensures that more degrees of freedom are available for optimization compared to alternative observer-based approaches.

Directly after the introduction of a new analysis or design procedure an academic example is presented to illustrate the method. At the end of this thesis a controller is computed for a well known model of a stirred tank reactor. The latter represents an example for a class of systems which can only be handled with SOS-programming tools using the new results of the presented work. Furthermore, to demonstrate the practical implementation of the proposed procedures a dynamic output feedback for an inverted pendulum laboratory setup is realized and the corresponding experimental results are discussed.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Problemstellung und Zielsetzung der SOS-Programmierung . . . . .	1
1.2	Beiträge der Arbeit . . . . .	3
1.3	Aufbau der Arbeit . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Grundlagen der SOS-Programmierung</b>	<b>9</b>
2.1	SOS-Polynome . . . . .	9
2.2	Positivstellensatz . . . . .	15
2.3	Software-Werkzeuge zur Lösung von SOS-Problemen . . . . .	19
2.3.1	Die MATLAB-Toolbox SOSTOOLS . . . . .	19
2.3.2	Alternativen zu SOSTOOLS . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Stabilitätsanalyse polynomialer nichtlinearer Systeme</b>	<b>23</b>
3.1	Bestimmung einer Abschätzung des Einzugsbereichs der Ruhelage . . . . .	24
3.1.1	Grundlagen der Lyapunov-Theorie . . . . .	24
3.1.2	Konstruktion einer Lyapunov-Funktion durch Optimierung der oberen Schranke . . . . .	29
3.1.2.1	Prinzip des Verfahrens . . . . .	29
3.1.2.2	Bestimmung einer oberen Schranke und einer Lyapunov-Funktion . . . . .	34
3.1.2.3	Bestimmung einer Abschätzung des Einzugsbereichs . . . . .	39
3.1.2.4	Anwendung auf ein Beispielsystem . . . . .	40

---

3.1.2.5	Bewertung des Verfahrens . . . . .	49
3.1.3	Konstruktion einer Lyapunov-Funktion durch Optimierung der unteren Schranke . . . . .	49
3.1.3.1	Prinzip des Verfahrens . . . . .	50
3.1.3.2	Bestimmung einer unteren Schranke und einer Lyapunov-Funktion . . . . .	51
3.1.3.3	Anwendung auf ein Beispielsystem . . . . .	57
3.2	Berücksichtigung von Stellsignal- und Zustandsbeschränkungen . . . . .	59
3.2.1	Optimierung der oberen Schranke . . . . .	61
3.2.2	Optimierung der unteren Schranke . . . . .	69
3.3	Bewertungskriterium für Abschätzungen des Einzugsbereichs höherdimensionaler Systeme . . . . .	76
<b>4</b>	<b>Entwurf von Zustandsrückführungen für polynomiale nichtlineare Systeme</b>	<b>88</b>
4.1	Entwurf nichtlinearer Zustandsrückführungen mit gesichertem Einzugsbereich . . . . .	89
4.1.1	Optimierung der oberen Schranke . . . . .	91
4.1.2	Optimierung der unteren Schranke . . . . .	104
4.2	Beeinflussung der Dynamik des geregelten Systems . . . . .	111
4.2.1	Eigenwertvorgabe für die Jacobi-Linearisierung der Regelung . . . . .	112
4.2.2	Konvergenzvorgabe für die Lyapunov-Funktion . . . . .	122
4.2.3	Bewertung der Verfahren . . . . .	131
<b>5</b>	<b>Entwurf von Zustandsrückführungen für nicht-polynomiale nichtlineare Systeme</b>	<b>133</b>
5.1	Polynomiale Approximation nichtlinearer Vektorfelder . . . . .	134
5.1.1	Taylorentwicklung . . . . .	134
5.1.2	$L_2$ -Approximation . . . . .	135
5.2	Fehlerabschätzung der Approximation . . . . .	144
5.3	Reglerentwurf . . . . .	147

---

5.3.1	Optimierung der oberen Schranke . . . . .	151
5.3.2	Optimierung der unteren Schranke . . . . .	175
<b>6</b>	<b>Entwurf von Ausgangsrückführungen für nichtlineare Systeme</b>	<b>189</b>
6.1	Statische Ausgangsrückführungen . . . . .	190
6.2	Dynamische Ausgangsrückführungen . . . . .	200
6.2.1	Bestimmung der Ausgangsrückführung . . . . .	200
6.2.2	Robuste asymptotische Kompensation konstanter Störungen . . .	212
<b>7</b>	<b>Anwendungsbeispiele</b>	<b>221</b>
7.1	Inverses Pendel . . . . .	221
7.2	Rührkesselreaktor . . . . .	229
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>237</b>
	<b>Anhang</b>	<b>241</b>
<b>A</b>	<b>Algorithmen</b>	<b>241</b>
A.1	Bisektionsverfahren . . . . .	241
A.2	Modifiziertes Bisektionsverfahren . . . . .	242
A.3	Bisektionsverfahren zur Minimierung . . . . .	243
<b>B</b>	<b>Beweis zu Satz 7</b>	<b>245</b>
	<b>Literatur</b>	<b>249</b>