Analysis

Grundlagen der

Infinitesimalrechnung

unter Nutzung der Vorlesungen von H. Karzel

Uwe Kraeft

2008

Berichte aus der Mathematik

Uwe Kraeft

Analysis
–
Grundlagen der Infinitesimalrechnung

unter Nutzung der Vorlesungen von H. Karzel

Shaker Verlag
Aachen 2008

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8322-7193-0
ISSN 0945-0882

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen
Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9
Internet: www.shaker.de • E-Mail: info@shaker.de

Vorwort

In Fortsetzung der „Einführung in die Mathematik" [KrI] folgt nun als weiterer Beitrag zum **Jahr der Mathematik 2008** ein zweiter Band mit den Grundlagen der Infinitesimalrechnung der Analysis. Dabei werden nur wenige Kenntnisse der Algebra und Mengenlehre als bekannt vorausgesetzt, die im ersten Band bereits behandelt wurden.

Die Hauptgebiete der Infinitesimalrechnung sind die historisch an erster Stelle stehenden unendlichen Folgen und Reihen sowie die Differenzial- und Integralrechnung, die bereits in Ansätzen in der Antike gefunden wurde. Die große Zeit der Entdeckungen begann im 17. Jahrhundert und zog sich bis in die mathematisch glanzvolle Zeit des 19. Jahrhundert hin. Auslöser der Untersuchungen waren meist praktische Fragen. Dieser Teil der Infinitesimalrechnung hat spätestens seit Entwicklung der elektronischen Computer etwas an praktischer Bedeutung verloren, da Ableitungen und Integrale auch von kompliziertesten Funktionen so genau wie gewünscht numerisch berechnet werden können. Dies gilt auch für Folgen und Reihen. Geblieben ist die theoretische Bedeutung in der Mathematik. Allerdings lehrt die Zahlentheorie, dass Ergebnisse und Formeln der Infinitesimalrechnung in aller Regel nur Näherungen sind. Falls diese in Beweisen als ganze Zahlen verwendet werden sollen, sind besondere Überlegungen erforderlich. Das gilt ganz besonders für die Nullkonvergenz und die unendlichen Werte, die bedeuten, dass die Ergebnisse beliebig ins Positive vergrößert ($+\infty$) oder ins Negative verkleinert ($-\infty$) werden können.

Als Quelle dieses Textes wurde insbesondere der Vorlesungszyklus Höhere Mathematik Ia bis IV (Infinitesimalrechnung) von Herrn Prof. Dr. Helmut Karzel an der Universität Hamburg (meine handschriftliche Mitschrift) verwendet. Weitere Einzelheiten wurden aus den Lehrbüchern von Dieudonné [Di1], [Di2], den Formelsammlungen von Abramowitz-Stegun [AS], Bronstein-Semendjajew [BS] sowie Ringleb [Ri] und zum Beispiel aus den bekannten Werken von Courant [Co], Fichtenholz [Fi], Maak [Ma], Mangoldt-Knopp [MK], Ostrowski [Os], Serret [Se], Smirnow [Sm] sowie Whittaker &

Watson [WW] und daneben aus eigenen zahlentheoretischen Untersuchungen entnommen (siehe Literaturverzeichnis am Ende des Buchs).

Das Buch ist sprachlich und in der Verwendung der Symbolik so geschrieben, dass es, zumindest im ersten Kapitel, gleichermaßen für speziell interessierte Schüler und Studenten der Mathematik, Naturwissenschaften, Ingenieur- oder Wirtschaftswissenschaften geeignet ist. Es ist ein Kompromiss zwischen einem rein mathematischen und einem rein anwendungsbezogenen Text; auch aus diesem Grund wurden einfache und mehr formale Beweise übergangen, die bei Bedarf mehr oder weniger leicht selbst angefertigt oder nachgelesen werden können. Der anwendungsorientierte Leser mag sich auf die Ergebnisse und grundlegenden Lehrsätze sowie Methoden konzentrieren. Der mehr theoretisch interessierte Leser wird alle Grundlagen einer homogenen Theorie vorfinden. Die Zielsetzung für alle Leser ist die, dass in überschaubarer Weise eine möglichst vollständige und leicht wiederholbare Einführung in die Grundlagen der Infinitesimalrechnung geboten wird; gelegentliche Wiederholungen erfolgen aus Gründen der Lesbarkeit. Das Buch ist auch sicher keine Formelsammlung, deren Benutzung in der Praxis wegen der Fülle der Formeln und Algorithmen erforderlich ist. Aber auch dies sollte nach der Lektüre dieses Buchs leicht möglich sein.

Die Reihenfolge im Text ist themenbezogen. Falls der Leser zum Beispiel vorerst nur an Funktionen mit einer unabhängigen Veränderlichen interessiert ist, möge er die Angaben für mehrere Veränderliche beziehungsweise erst später interessierende Themen zunächst einfach überschlagen.

Der Inhalt wurde sorgfältig auf Fehler geprüft, die aber nicht gänzlich ausgeschlossen werden können. Eine Gewährleistung oder Garantie für die Richtigkeit kann nicht übernommen werden. Ich bin für entsprechende Hinweise oder Verbesserungsvorschläge dankbar.

8. April 2008 Uwe Kraeft

Allgemeine Symbole (Auswahl)

$\forall$	für alle
$\exists$	es gibt
$\Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow$	hieraus folgt (in den angegebenen Richtungen)
$\in$	ist Element von (ist enthalten in)
$\notin$	ist kein Element von (ist nicht enthalten in)
$A=\{a,b,c\}$	Beispiel einer Menge A mit den Elementen a, b und c
$A \subset B$	A ist Teilmenge von B
$\overline{A}$	$= M - A$, Komplementärmenge von A bezüglich M
I	Indexmenge
$y=f(x)$	Funktion von x
$g \circ f(x)$	$= g(f(x))$
$a, \alpha, \ldots$	Elemente (… bedeutet und so weiter)
$-a, a^{-1} = \frac{1}{a}$	inverse Elemente
$\|x\|$	Absolutbetrag (positiver Wert falls $x < 0$) einer Zahl x
m, n, …	meist natürliche Zahlen
$\mathbb{N}$ $(\mathbb{N}^0)$	Menge der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... $(\mathbb{N}^0 = \mathbb{N} \cup \{0\})$
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen …, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …
$\mathbb{Q}$	Brüche oder rationale Zahlen $\frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen, $\mathbb{R}^+(\cdot)$ positive reelle Zahlen mit Multiplikation
$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R} - \{0\}$
$\mathbb{Q}(\mathbb{R})$	rationale oder reelle Zahlen
$\{x \in \mathbb{R}; ...\}$	Menge aller reeller Zahlen x mit der Eigenschaft …
[...],]...[	geschlossenes, offenes Intervall, …
[a,b]	geschlossenes Intervall $a \le x \le b$
$a=\alpha+i\beta$	$=\alpha+\beta i$ komplexe Zahl mit α (Realteil $\Re(a)$), β (Imaginärteil $\Im(a)) \in \mathbb{R}$, $i^2=-1$
$a^* = \overline{a} = \alpha - i\beta$	konjugiert(e) komplexe Zahl
$a=\alpha+i\beta$	$=r(\cos\varphi + i*\sin\varphi)$ in Polarkoordinaten; $r = \|a\|$ Absolutbetrag von a oder Länge des Vektors $\vec{r}$; φ heißt Argument arg(a), arg a oder Polarwinkel
$\mathbb{C}$	komplexe Zahlen

$P(x\|y\|z)$	Punkt mit den Koordinaten x,y,z
$\vec{r}$	$=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x,y,z)$ Vektor mit den Komponenten x,y,z
$\|\vec{r}\|$	Betrag (Länge) des Vektors $\vec{r}$
$*, \cdot, \bullet, \times$	$*$ allgemeines Produkt, $\cdot$ reelles Produkt, $\bullet$ Skalarprodukt, $\times$ Vektorprodukt, „ab" Produkt nach Zusammenhang
$=$	gleich (identisch)
$\cong$	so nah wie gewünscht, aber nicht gleich
$\approx$	ungefähr, gerundet, kann für große n angenähert werden
$\neq$	nicht gleich
$<, >$	kleiner, größer
$\frac{p}{q}$	Verhältnis oder gemeiner Bruch $p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}$, der echt $\left\|\frac{p}{q}\right\| < 1$ oder unecht $\left\|\frac{p}{q}\right\| \geq 1$ sein kann
$n!$	$= 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$
$\binom{a}{b}$	$\frac{a!}{b!(a-b)!} = \frac{a(a-1)(a-2)*\ldots*(a-b+1)}{b(b-1)(b-2)*\ldots*1}$ Binomialkoeffizient
(a_n), (f_n)	Folge von Zahlen oder Funktionen
$\sum_{i=1}^{n} a_i$	$=a_1+a_2+ \ldots +a_n$ Reihe
$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$	unendliche Reihe
$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$	Funktionenreihe
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$	Potenzreihe
s_n	Partialsumme einer Reihe
$\prod_{i=1}^{n} a_i$	$=a_1*a_2* \ldots *a_n$ Produkt

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$	$ad - bc$ Determinante; auch für mehr Elemente
a^n	n-te Potenz von a (n Exponent)
a^{-n}	$1/a^n$
$a^{1/m}$	m-te Wurzel von a (zum Beispiel $a^{1/2}=\sqrt{a}$)
$a^{n/m}$	m-te Wurzel von a^n
$\log_a x$	Logarithmus zur Basis a mit $x = a^{\log_a x}$
$\ln x$	natürlicher Logarithmus von x mit $x=e^{\ln x}$
$\sin x$	trigonometrische Funktion Sinus
$\cos x$	trigonometrische Funktion Kosinus
$\tan x$	trigonometrische Funktion Tangens
$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	Grenzwert „für x gegen a“
$\lim\limits_{x\to a+} f(x)$	Grenzwert „für x gegen a von rechts“
$\lim\limits_{x\to a-} f(x)$	Grenzwert „für x gegen a von links“
$\pm\infty$	$\pm$ unendlich, das heißt ohne Ende
$\dfrac{f(x)-f(u)}{x-u}$	Differenzenquotient
$f'(x)$	$=\dfrac{df(x)}{dx}$, $dx \neq 0$; $f'(x)$ 1. Ableitung, $f^{(n)}(x)$ n-te Ableitung
$\int f(x)dx$	$F(x)+c$ Integral, $F(x)$ Stammfunktion, c Konstante

$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha)$, $\alpha,\beta \in U$, bestimmtes Integral

Spezielle Symbole in Kapitel 2 bis 16 (Auswahl):

sup(M)	Supremum von M, S. 54
inf(M)	Infimum von M, S. 54
Max(M)	Maximum von M, S. 54
Min(M)	Minimum von M, S. 54
$d(x,y)$	Abstand oder Distanz, S. 59
(M,d)	ein metrischer Raum, S. 59
$M = \mathbb{R}^n$	$= \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$, der n-dimensionale reelle Raum, S. 59
$\vec{x} \bullet \vec{y}$	$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, das Skalarprodukt von Vektoren, S. 60
$K(a,r)$	$= \{x \in M; d(x,a) \leq r\}$, „Kugel", a Zentrum, r Radius, S. 61
$\mathring{K}(a,r)$	$= \{x \in M; d(x,a) < r\}$, offene „Kugel", S. 61
$S(a,r)$	$= \{x \in M; d(x,a) = r\}$, Sphäre, S. 61
$d(A,B)$	$= \inf\{d(a,b); a \in A, b \in B\}$, S. 62
$\delta(A)$	$= \sup\{d(x,y); x,y \in A\}$, Durchmesser $\varnothing \neq A \subset (M,d)$, S. 63
O	Menge aller offenen Mengen von M, S. 66
A	Menge aller abgeschlossenen Mengen von M, S. 66
U(a)	Menge aller Umgebungen von a, S. 67
$U_\lambda, \lambda \in I$	Fundamentalsystem von Umgebungen eines Punkts $a \in M$
$\mathring{A}$	$\{x \in A; A \in \mathbf{U}(x)\}$, das Innere einer Menge A, S. 68
$\widehat{A}$	$= \{x \in M; U_x \cap A \neq \varnothing \; \forall U_x \in \mathbf{U}(x)\}$,abgeschlossene Hülle, S.68
$\overline{\mathring{A}}$	$= \overline{\widehat{A}}$ das Äußere von A, S. 68
$Rd(A)$	$= \widehat{A} \cap \widehat{\overline{A}} = Rd(\overline{A}) \in \mathbf{A}$, der Rand von A, S. 69
$\Vert\ \Vert$	Norm eines Vektorraums, S. 81
$(\vec{x}_\alpha)_{\alpha \in A}$	Familie von Folgen, S. 89
$St(M, V)$	Menge aller stetigen Abbildungen von M in V, S. 104
$B(M, V)$	Menge aller beschränkten Abbildungen von M in V, S. 104
$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$	$= \lim\limits_{n\to\infty}(\sup\{x_{n+h}; h \geq 0\})$, der Limes superior, S. 105
$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$	$= \lim\limits_{n\to\infty}(\inf\{x_{n+h}; h \geq 0\})$, der Limes inferior, S. 105
$\mathcal{L}(V, W)$	lineare Abbildungen von V in W, S. 109

$\partial_j f\big\|_{\vec{a}}$	$= \frac{\partial f}{\partial x_j}\Big\|_{\vec{a}} = DF_{j\vec{a}} = F'_{j\vec{a}}(\vec{a})$, die j-te partielle Ableitung, S. 109
∇	Nabla Operator, S. 109
Df	Funktionalmatrix, S. 110
R_n	Restglied der Taylorreihe, S. 131
$\dot{\vec{x}}(t)$	$= (\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \ldots)$, S. 146
$\overline{S}(Z_j)$	$= \sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - x_{\nu-1}) \cdot \sup\{f(x_{\nu-1}), f(x_\nu)\}$, die Obersumme, S. 157
$\underline{S}(Z_i)$	$= \sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - x_{\nu-1}) \cdot \inf\{f(x_{\nu-1}), f(x_\nu)\} \le \overline{S}(Z_j)$, die Untersumme
$\overline{\int_a^b} f(x)dx$	$= \inf\{\overline{S}(Z_j); Z_j$ Zerlegung von $[a,b]\}$; das Oberintegral
$\underline{\int_a^b} f(x)dx$	$= \sup\{\underline{S}(Z_i); Z_i$ Zerlegung von $[a,b]\}$; das Unterintegral
$\int_{\vec{K}} f(\vec{x})ds$	$= \int_0^{s_0} f(\vec{x}(s))ds = \int_a^b f(\vec{x}(t)) \left\| \dot{\vec{x}}(t) \right\| dt$, das Kurvenintegral, S. 159
$\oint_K f(z)dz$	Integration entlang einer geschlossene Kurve, S. 160
$\vec{R}$	der Rand (mit Richtung) eines Rechtecks R, S. 161

Inhalt