

Berichte aus der Mathematik

**Wolfgang Schneider**

## **Analytische Geometrie**

Vom gymnasialen zum universitären Anspruch

Shaker Verlag  
Aachen 2015

**Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Copyright Shaker Verlag 2015

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-3334-2

ISSN 0945-0882

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen

Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9

Internet: [www.shaker.de](http://www.shaker.de) • E-Mail: [info@shaker.de](mailto:info@shaker.de)

# Inhalt

<b>1</b>	<b>Euklidischer <math>\mathbb{R}^2</math></b> .....	4
1.1	Punkte und Geraden.....	4
1.2	Parallelität.....	4
1.3	Strecken.....	5
1.4	Orthogonalität, Spiegelung an einer Geraden.....	5
1.5	Streckenmessung.....	6
1.6	Zeichnerische Veranschaulichung von $\mathbb{R}^2$ .....	6
<b>2</b>	<b>Elementare Operationen mit Vektoren</b> .....	8
2.1	Vektoren in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ .....	8
2.2	Die additiven Gruppen $V_2$ und $V_3$ .....	9
2.3	Multiplikation eines Vektors mit reellen Skalaren.....	12
<b>3</b>	<b>Die Vektorräume <math>V_2</math> und <math>V_3</math></b> .....	15
3.1	Koordinatendarstellung von Vektoren.....	15
3.2	Addition und Skalarmultiplikation bei Koordinatendarstellung.....	19
3.3	Basiswechsel.....	21
<b>4</b>	<b>Zusammenhang zwischen Vektorraum und Punktraum</b> .....	25
4.1	Ortsvektor und Koordinatensystem.....	25
4.2	Vektoren in $\mathbb{R}^n$ mit $n>3$ .....	28
4.3	Wechsel des Koordinatensystems.....	31
<b>5</b>	<b>Matrizen, insbesondere inverse Matrix und Determinante</b> .....	34
5.1	Operationen mit Matrizen.....	34
5.2	Invertierbarkeit.....	35
5.3	Determinante.....	35
5.4	Eigenschaften der Determinante.....	37
5.5	Die genaue Bedeutung der Determinante für die Invertierbarkeit.....	38
5.6	Symmetrische und orthogonale Matrizen.....	39
<b>6</b>	<b>Lineare Vektorabbildungen</b> .....	40
6.1	Definition und Eigenschaften linearer Vektorabbildungen.....	40
6.2	Die darstellende Matrix einer linearen Vektorabbildung.....	43
6.3	Deutung einer linearen Vektorabbildung als spezielle affine Punktabbildung.....	47

6.4	Orthogonale lineare Vektorabbildungen (in $V_2$ und $V_3$ ).....	48
6.5	Aufgaben.....	58
<b>7</b>	<b>Reelle lineare <math>i \times i</math>-Gleichungssysteme.....</b>	<b>61</b>
<b>8</b>	<b>Eigenwerte und Eigenvektoren.....</b>	<b>65</b>
<b>9</b>	<b>Das Standardskalarprodukt.....</b>	<b>69</b>
9.1	Definition und Eigenschaften für $V_2$ bzw. $V_3$ .....	69
9.2	Koordinatendarstellung des Skalarprodukts und Ausweitung auf $V_i$ mit $i > 3$ .....	72
<b>10</b>	<b>Orthogonale lineare Vektorabbildungen und orthogonale Matrizen.....</b>	<b>80</b>
<b>11</b>	<b>Lineare Vektorabbildungen mit symmetrischen darstellenden Matrizen.....</b>	<b>98</b>
<b>12</b>	<b>Affine Unterräume in <math>\mathbb{R}^i</math>: Geraden, Ebenen, Hyperebenen.....</b>	<b>104</b>
12.1	Geraden, Ebenen, Hyperebenen und ihre Parametergleichungen.....	104
12.2	Teilverhältnis.....	107
12.3	Hyperebenen: Normalengleichung und Koordinatengleichungen.....	109
12.4	Abstand eines Punktes von einem affinen Unterraum.....	113
12.5	Die gegenseitige Lage von affinen Unterräumen in $\mathbb{R}^i$ .....	117
12.6	Abstand zweier disjunkter affiner Unterräume in $\mathbb{R}^i$ .....	126
12.7	Projektionen auf bzw. Spiegelungen an affinen Unterräumen als Beispiel für affine Punktabbildungen.....	137
12.8	Winkel zwischen affinen Unterräumen.....	150
12.9	Winkelhalbierende.....	152
<b>13</b>	<b>Das Vektorprodukt in <math>V_3</math>.....</b>	<b>157</b>
13.1	Definition und Eigenschaften.....	157
13.2	Anwendungen des Vektorprodukts.....	160
<b>14</b>	<b>Kreis (in <math>\mathbb{R}^2</math>) und Kugel (in <math>\mathbb{R}^3</math> mit <math>i \geq 3</math>).....</b>	<b>166</b>
14.1	Kreis- bzw. Kugelgleichung.....	166
14.2	Tangenten und Tangentialhyperebenen bei Kreisen und Kugeln.....	168
<b>15</b>	<b>Kegelschnitte.....</b>	<b>172</b>
15.1	Gerader Kreiszylinder und Doppelkegel.....	172
15.2	Schnitt einer Ebene mit einem Doppelkegel.....	174
15.3	Sinnvolle Einteilung der Normalformen bei den Kegelschnitten.....	184
15.4	Zu Ellipse, Hyperbel und Parabel.....	185
<b>16</b>	<b>Kurven 2. Grades in <math>\mathbb{R}^2</math> und Flächen 2. Grades in <math>\mathbb{R}^3</math>.....</b>	<b>193</b>
16.1	Definition und Beispiele.....	193
16.2	Übergang zu den Normalformen.....	196

16.3	Die Normalformen der Flächen 2.Grades.....	201
16.4	Schnitt einer Fläche 2. Grades mit einer Ebene.....	209
16.5	Tangenten an Ellipsen, Hyperbeln, Parabeln, Ellipsoide, Hyperboloide und Paraboloide.....	214
<b>17</b>	<b>Affine Punktabbildungen.....</b>	<b>218</b>
17.1	Definition, einfache Merkmale und Bewegungen als Beispiele.....	218
17.2	Reguläre affine Punktabbildungen.....	227
17.3	Bewegungen.....	235
17.4	Ähnlichkeitsabbildungen.....	250
17.5	Die affine Gruppe für $\mathbb{R}^2$ .....	252