Mathematik

Uwe Kraeft

Statistische Untersuchungen der Elliptischen Integrale

Shaker Verlag

Statistische

Untersuchungen

der Elliptischen Integrale

Uwe Kraeft

2019

Berichte aus der Mathematik

Uwe Kraeft

Statistische Untersuchungen der Elliptischen Integrale

Shaker Verlag
Düren 2019

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Copyright Shaker Verlag 2019
Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-6658-6
ISSN 0945-0882

Shaker Verlag GmbH • Am Langen Graben 15a • 52353 Düren
Telefon: 02421 / 99 0 11 - 0 • Telefax: 02421 / 99 0 11 - 9
Internet: www.shaker.de • E-Mail: info@shaker.de

Vorwort

Vor allem in der reinen Mathematik ist die „genaue“ Zahl das Ziel. Bekanntermaßen ist dies, insbesondere bei zahlentheoretischer Betrachtung, schon bei reellen Zahlen nicht erreichbar. Diese sind bereits beim Hinschreiben ungenau, sofern der Schreibvorgang irgendwann beendet wird. Wir trösten uns damit, dass diese Zahlen ja im Prinzip beliebig genau sind.

In der Angewandten Mathematik ist dagegen bei der Formelentwicklung von Abhängigkeiten eine ungefähre vielfach vereinfachte Genauigkeit ausreichend oder sogar erwünscht. Dabei ist die Zahl der angegebenen Dezimalstellen aus verschiedenen Gründen auch größer als notwendig.

Die Elliptischen Integrale sind bestens bekannt sowie erforscht und füllen insbesondere Tabellenwerke. Die Ergebnisse sind numerische Näherungen, die heute einfach und mit hoher Genauigkeit bereits mit Tabellenkalkulationen erzielbar sind. Als formelmäßige Approximationen werden zum Beispiel Polynome genutzt, deren Koeffizienten durch mehrfache statistische Regressionen bestimmt werden. Polynome haben den Nachteil, dass sie nur für bestimmte Werte gelten und die echten Abhängigkeiten vielfach gar nicht zeigen. Bei den Elliptischen Integralen sind die möglichen Einflussgrößen die (variablen) gewählten Konstanten $k=\sin \alpha$ und n sowie eine echte Variable, die hier $\xi=\sin \varphi$ genannt wird.

Das Ziel der vorliegenden Untersuchungen ist vor allem ein Vergleich der numerisch bestimmten Elliptischen Integrale mit den Partialintegralen der Funktionen der Integranden, die aus deren Produkt bestehen. Dabei kommen statistische Methoden zum Einsatz.

Hier werden in 6 Kapiteln die Funktionen der Elliptischen Integrale, das Elliptische Integral 1. Gattung (Art), die Elliptischen Integrale 2. und 3. Gattung (Art), die formelmäßige Darstellung der Koeffizienten der Partialintegrale, die mathematische „Berechnung“ des Elliptischen Integrals 1. Gattung, die Approximationen der

Funktionswerte von Elliptischen Integralen sowie ein theoretischer Ausblick in elementarer Darstellung einführend behandelt.

Eine Literaturauswahl ist beigefügt. Die Literaturzitate betreffen wie in den vorangehenden Bänden nicht nur die Übernahme von Inhalten, sondern sind auch ein Hinweis für interessierte Leser zur weiteren Information.

Das Buch stellt die Meinung des Autors nach dem Studium der Literatur und dessen Kenntnissen dar. Der Inhalt wurde sorgfältig auf Fehler geprüft, die aber nicht gänzlich ausgeschlossen werden können. Eine Gewährleistung oder Garantie für die Richtigkeit des Textes kann nicht übernommen werden. Ich bin für entsprechende Hinweise oder Verbesserungsvorschläge dankbar.

Leimen, im Februar 2019 Uwe Kraeft

http://www.uwe-kraeft.de/

Auswahl von Symbolen

$\Rightarrow$	hieraus folgt (in den angegebenen Richtungen)
$\in$	ist Element von (ist enthalten in)
f(x)	Bild des Originals x
$\mathbb{R}$	Körper der reellen Zahlen, zum Beispiel a, b, c, …, x, y, z
$\mathbb{C}$	Körper der komplexen Zahlen, zum Beispiel x+yi
=	nur in der reinen Mathematik genau gleich (identisch); wird praktisch auch für Grenzwerte verwendet
$\cong$	so nah wie gewünscht, aber nicht gleich
$\approx$	ungefähr, gerundet, kann angenähert werden
~	von ähnlicher Größenordnung
$\neq$	ungleich
$<,\leq,>,\geq$	kleiner, kleiner oder gleich, größer, größer oder gleich
$\sqrt{\;}$	Quadratwurzel
sin, cos, tan	trigonometrische Funktionen
F(x)	bestimmtes Integral von f(x): $\int_a^b f(x)dx$ mit $dx\neq 0$
EI	EI1, EI2, EI3 Elliptisches Integral 1., 2., 3. Gattung (Art)
$\xi(=\sin\varphi)$	Variable (=Legendre-Form), $d\xi/d\varphi=\cos\varphi \Rightarrow d\xi=(\cos\varphi)d\xi$
$\sin^2\varphi$	$=(\sin\varphi)^2$
$k=\sin\alpha$, n	gewählte Konstanten

$$\mathrm{EI1} \quad = \mathrm{EllipInt1} = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\xi_1} \frac{1}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}\,d\xi = \int_0^{\xi_1} f_1(\xi)f_2(\xi)\,d\xi \\ \displaystyle\int_0^{\xi_1} \upsilon_1\,d\xi = \int_0^{\varphi_1} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi \end{cases}$$

$$\mathrm{EI2} \quad = \mathrm{EllipInt2} = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\xi_1} \sqrt{\frac{1-k^2\xi^2}{1-\xi^2}}\,d\xi = \int_0^{\xi_1} \frac{f_1(\xi)}{f_2(\xi)}\,d\xi \\ \displaystyle\int_0^{\xi_1} \upsilon_2\,d\xi = \int_0^{\varphi_1} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi \end{cases}$$

$$\mathrm{EI3} \quad = \mathrm{EllipInt3} = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\xi_1} \frac{1}{(1-n\xi^2)\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}\,d\xi = \int_0^{\xi_1} f_3(\xi)f_1(\xi)f_2(\xi)\,d\xi = \\ \displaystyle\int_0^{\xi_1} \upsilon_3\,d\xi = \int_0^{\varphi_1} \frac{1}{(1-n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi \end{cases}$$

Anm. Die obere Grenze ξ_1 beziehungsweise φ_1 des bestimmten Integrals ist wie die untere Grenze 0 ein bestimmter gewählter Wert der Integrationsvariablen. Im berechneten bestimmten Partialintegral wird die obere Grenze ξ_1 durch die Integrationsvariable $0 \leq \xi \leq 1$ ersetzt (siehe auch Seite 97).

Partialintegrale:

$$\Phi = \int_0^{\xi_1} \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\, d\xi = \int_0^{\xi_1} f_1(\xi)\, d\xi$$

$$X = \int_0^{\xi_1} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\xi^2}}\, d\xi = \int_0^{\xi_1} f_2(\xi)\, d\xi$$

$$\Psi = \int_0^{\xi_1} \frac{1}{1-n\xi^2}\, d\xi = \int_0^{\xi_1} f_3(\xi)\, d\xi$$

$$\Omega_1 = k^2 \int_0^{\xi_1} \frac{\xi^2}{\sqrt{1-\xi^2}}\, d\xi = k^2 \int_0^{\xi_1} \xi^2 f_1(\xi)\, d\xi$$

$$\Omega_2 = k^2 \int_0^{\xi_1} \frac{\xi^2}{\sqrt{1-k^2\xi^2}}\, d\xi = k^2 \int_0^{\xi_1} \xi^2 f_2(\xi)\, d\xi$$

Φ, X	werden auch als „Realteil" R beziehungsweise „Imaginärteil" I bezeichnet
A, B, C	$\in \mathbb{R}, \mathbb{C}$; Konstanten der Partialbruchzerlegung
a, b, c	Faktoren der Partialintegrale zur Berechnung des „Realbetrags"
$b_1, b_2, \ldots$	Regressionskoeffizienten
num	numerische Integration
Anm.	Anmerkung

Weitere Symbole werden im Text erklärt.

Inhalt

Imaginäre Zahlen

Die komplexen Zahlen a+bi mit $a, b \in \mathbb{R}$ entstehen bekanntlich als Zahlenkörper $\mathbb{C}$ aus dem der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ durch Adjunktion von $\sqrt{-1} = i$. Die imaginäre Zahl i ist ein Symbol oder Icon für eine gedachte Zahl, deren Quadrat -1 ergibt.

Es gilt zum Beispiel $\sqrt{4} = \pm 2$, wobei +2 oder -2 (in diesem Fall genau) die Zahlen sind, deren Quadrat 4 ergibt. Im allgemeinen Fall ist das Wurzelzeichen „r" (radix) über nicht negativen reellen Zahlen das Symbol für einen Algorithmus mit einem angenäherten reellen Ergebnis. Vielfach wird ± vor das Wurzelzeichen geschrieben; bei deren Fortlassen wird die positive Wurzel angenommen; das ändert aber nichts an der Tatsache, dass Plus und Minus als Vorzeichen möglich sind. Daher gilt

$\sqrt{-1} = \pm i$, denn $i \cdot i = -1$ und $(-i) \cdot (-i) = (-1 \cdot i) \cdot (-1 \cdot i) = (-1) \cdot (-1) \cdot i^2 = -1$.

Somit ist es falsch zu schreiben

$$\sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{1} = 1,$$

denn zum einen ist das Ergebnis der Wurzel aus 1 gleich ± 1 und zum anderen ist $\sqrt{-1} = \pm i$. Es müssen somit

$$(i)^2 = (+i)^2 = (-i)^2 = -1 \neq -(i)^2 = -1 \cdot (i)^2 = (-1) \cdot (-1) = +1$$

unterschieden werden. Die konjugiert komplexen Zahlen müssten deshalb zum Beispiel eigentlich wie folgt geschrieben werden:

$$a + bi = a + (+b) \cdot i, \quad a - bi = a + (-b) \cdot i, \quad (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

Im folgenden Text ergibt sich zum Beispiel die Konstante B als

$$B = \frac{k}{\sqrt{k^2 - 1}} = \pm \frac{k}{\sqrt{1 - k^2}} i \text{ für } 0 \leq k < 1, \text{ mit } B^2 = \frac{k^2}{k^2 - 1} = -\frac{k^2}{1 - k^2}.$$

Der Betrag einer komplexen Zahl ist nach dem Satz des Pythagoras als Länge des Vektors in der Gaußschen Zahlenebene definiert:

$$|z| = |x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x + yi)(x - yi)}, \; z \in \mathbb{C}, \; x, y \in \mathbb{R}.$$

Der in diesem Text verwendeten „Realbetrag" ist dagegen

$$\sqrt{ax^2 + by^2 + \ldots}, \; a, b, x, y \in \mathbb{R},$$

wobei a beziehungsweise b positiv oder, wie das Quadrat einer imaginären Zahl, negativ sein können.