

Berichte aus der Volkswirtschaft

**Thomas Mazzone**

**Stetig/diskrete Zustandsraummodelle  
dynamischer Wirtschaftsprozesse**

Shaker Verlag  
Aachen 2007

**Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Zugl.: Hagen, Univ., Diss., 2006

Copyright Shaker Verlag 2007

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8322-5826-9

ISSN 0945-1048

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen

Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9

Internet: [www.shaker.de](http://www.shaker.de) • E-Mail: [info@shaker.de](mailto:info@shaker.de)

---

## Danksagung

Meinen Eltern Gertrud und Gabriel<sup>†</sup> Mazzoni. Ihnen verdanke ich alles was ich bin.

Mein besonderer Dank gilt meinem akademischen Lehrer Prof. Dr. Hermann Singer, der den Begriff des Doktorvaters mit Leben gefüllt hat und mich weit über die Grenzen der fachlichen Betreuung hinaus unterstützt hat.

Ebenso schulde ich Prof. Dr. Günter Fandel großen Dank für viele fachliche Diskussionen und Anregungen und die warmherzige Aufnahme im Kreis seines Lehrstuhls.

Ich bin vielen Menschen zu Dank verpflichtet, deren großzügige Unterstützung mich über lange Zeit begleitet hat. Stellvertretend möchte ich Dr. Wolfram Berger, Dr. Michael Lorth und Herrn Steffen Blaga für ihre fachliche und persönliche Unterstützung danken, sowie meinen Kollegen Frau Anja Bittner und Frau Verena Berg und den Mitarbeitern des Lehrstuhls für Produktions- und Kostentheorie für die ausgezeichnete und kollegiale Zusammenarbeit.

Schließlich gilt mein Dank noch meinen Korrektoren Frau Alexandra Busch und Herrn Thomas Haßler, die mit viel Engagement und Geduld Ordnung ins orthographische Chaos brachten.

Meinem langjährigen Freund Thomas Haßler und meiner Lebensgefährtin Alexandra Busch verdanke ich gleichfalls vielfältige persönliche Unterstützung ebenso wie Christel und Peter Rössler, ohne deren Großzügigkeit diese Arbeit nicht möglich gewesen wäre.

Hagen, den 22.06.2006



---

## Geleitwort

Herrn Mazzonis Arbeit hat die dynamische Modellierung von ökonomischen Prozessen zum Gegenstand. Im Gegensatz zur üblichen Vorgehensweise wird hierbei angenommen, daß die Zeit eine kontinuierliche Variable darstellt. Modelle dieser Art sind auch in den Wirtschaftswissenschaften seit langem bekannt, etwa durch die Arbeiten von T.C. Koopmans (1950), A.R. Bergstrom (1966), P.C.B. Phillips (in Bergstrom 1976) u.a. Jedoch werden in der Ökonometrie und der empirischen Wirtschaftsforschung aufgrund der lediglich zeitdiskreten Meßbarkeit der Variablen (etwa monatlich, vierteljährlich etc.) zeitdiskrete Modelle meist bevorzugt.

Diese sogenannten Zeitreihen-Modelle dominieren die Modellierung von Wirtschaftsprozessen, obwohl sie gravierende Nachteile aufweisen. Beispielsweise wird durch den Zeittakt der Messungen ein Modell eingeführt, das nur an diesen diskreten Zeitpunkten definiert ist. Andererseits existieren relevante Größen auch außerhalb der Meßzeitpunkte. Daher hat eine Modellierung, welche stetige Dynamik und diskrete Messungen verbindet, einen höheren theoretischen und empirischen Gehalt, da z.B. Prognosen zu beliebigen Zeitpunkten möglich sind.

Im Bereich der Ingenieurwissenschaft (etwa Jazwinski 1970) existieren seit langem Ansätze, welche stetige Dynamik und diskrete Messung miteinander verbinden. Das sogenannte kontinuierlich-diskrete Zustandsraum-Modell besteht aus einer dynamischen System-Gleichung und einem Meß-Modell, bei dem die kontinuierlichen Zustände auf meßbare Größen abgebildet werden. Zustandsraum-Modelle sind somit sehr flexibel, da auch nichtbeobachtbare Größen in die Modellierung einbezogen werden können. Beispielsweise sind latente Faktoren-Modelle Spezialfälle eines Meßmodells.

Herrn Mazzonis Arbeit leistet einen wichtigen Beitrag zur Rezeption und Anwendung stetig-diskreter Modelle in den Wirtschaftswissenschaften. Dies gelingt mit Hilfe einer zweiteiligen Gliederung der Arbeit in die Teile *Probabilistische dynamische Systeme* und *Ökonomische Modelle*. Teil I beschäftigt sich mit den grundlegen-

den Konzepten der Modellierung, insbesondere von stochastischen Prozessen und deren Spezifikation in Form von stochastischen Differentialgleichungen (SDE) sowie ihren Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Teil II widmet sich ausführlich der Anwendung in linearen und nichtlinearen ökonomischen Modellen sowie der praktischen Umsetzung durch Parameterschätzung mit realen Wirtschaftsdaten.

Damit ist ein innovativer Beitrag zur empirischen Wirtschaftsforschung gelungen, der den Bogen von der dynamischen Modellierung zu empirischen Resultaten spannt.

Ich wünsche der Arbeit eine weite Verbreitung und hoffe, daß sie zur Rezeption der vielfältigen Vorteile des kontinuierlich-diskreten Ansatzes beiträgt.

Hagen, im Dezember 2006

Univ.-Prof. Dr. Hermann Singer

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>Inhaltsverzeichnis</b> .....	I
<b>Abbildungsverzeichnis</b> .....	V
<b>Tabellenverzeichnis</b> .....	VII
<b>1 Einleitung</b> .....	1

---

## Teil I Probabilistische dynamische Systeme

---

<b>2 Deterministische Prozesse</b> .....	11
2.1 Lineare homogene Differentialgleichungen .....	11
2.2 Lineare inhomogene Differentialgleichungen .....	13
2.3 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung .....	14
2.4 Nichtlineare Differentialgleichungen .....	16
2.5 Nichtautonome Differentialgleichungen .....	17
2.6 Partielle Differentialgleichungen .....	18
<b>3 Stochastische Prozesse</b> .....	21
3.1 Rauschprozess, <i>Markov</i> -Eigenschaft und Martingale .....	22
3.2 Stochastische Konvergenzbegriffe .....	23
3.3 <i>Wiener</i> -Prozess und weißes Rauschen .....	24
3.4 Stochastische Differential- und Integralgleichungen .....	29
3.5 Itô und Stratonovich .....	31
3.6 Simulation stochastischer Differentialgleichungen .....	34
3.7 <i>Chapman-Kolmogoroff</i> -Gleichung und <i>Kramers-Moyal</i> -Entwicklung ..	35
3.8 <i>Pawula</i> -Theorem und <i>Fokker-Planck</i> -Gleichung .....	38
3.9 Zusammenhang zwischen <i>Fokker-Planck</i> - und <i>Itô</i> -Gleichung .....	40

<b>4 Zustandsraummodelle und Filter</b> .....	43
4.1 Zustandsraummodelle .....	43
4.2 Allgemeiner nichtlineare Filter und Normalkorrelation .....	44
4.3 <i>Kalman</i> -Filter .....	45
4.4 Entwicklung der Momente .....	46
4.4.1 Erweiterter <i>Kalman</i> -Filter (EKF) .....	48
4.4.2 Second-Order Nonlinear Filter (SNF) .....	49
4.4.3 Higher-Order Nonlinear Filter (HNF) .....	50
4.4.4 Weitere nichtlineare <i>Kalman</i> -Varianten .....	53
4.5 Stützstellenbasierte Verfahren .....	54
4.5.1 Unscented <i>Kalman</i> -Filter (UKF) .....	54
4.5.2 <i>Gauß-Hermite</i> -Filter (GHF) .....	58
4.6 Zusammenhang zwischen <i>Gauß</i> schen Filtern .....	59
4.7 Diskretisierung der <i>Itô</i> -Gleichung .....	60
4.7.1 Ursprüngliche LL-Methode .....	61
4.7.2 Verbesserte LL-Methode .....	62
4.8 Matrixdarstellung des <i>Fokker-Planck</i> -Operators .....	63
4.9 Simulationsbasierte Filter .....	67
4.10 Filterperformance im <i>Ginzburg-Landau</i> -Modell .....	68
<b>5 Parameterschätzung und Glätter</b> .....	73
5.1 Optimale Zustandsschätzung und allgemeiner nichtlinearer Glätter ..	73
5.2 <i>Kalman</i> -Glätter .....	75
5.3 Kontinuierlich/diskreter <i>Kalman</i> -Glätter .....	76
5.3.1 Extended <i>Kalman</i> -Smoother (EKS) .....	77
5.3.2 Second-Order Nonlinear Smoother (SNS) .....	79
5.4 Maximum-Likelihood Schätzung der Parameter .....	79
5.5 <i>Bayes</i> -Schätzung im erweiterten Zustandsraum .....	83
5.6 Schätzung grundlegender Modelle .....	85
5.6.1 <i>Ornstein-Uhlenbeck</i> -Prozess .....	86
5.6.2 <i>Ginzburg-Landau</i> -Modell .....	92
5.6.3 <i>Lorenz</i> -Modell .....	95
5.6.4 Tracking-Problem .....	101
5.6.5 <i>Cox-Ingersoll-Ross</i> -Modell (CIR) .....	105
5.6.6 Zusammenfassung der Simulationsergebnisse .....	108
5.7 Numerische Rezepte .....	109
5.7.1 Positiv-Definite Filterfehler-Kovarianzmatrix .....	110
5.7.2 Symmetrische Filterfehler-Kovarianzmatrix .....	111
5.7.3 Pruning und alternative Matrixzerlegungen .....	112



---

**Teil II Ökonomische Modelle**


---

<b>6</b>	<b>Entwicklung der ökonomischen Theorie</b> . . . . .	119
<b>7</b>	<b>Lineare ökonomische Modelle</b> . . . . .	123
7.1	Das Konjunkturzyklus-Modell von Phillips . . . . .	123
7.1.1	Modellgleichungen . . . . .	123
7.1.2	Daten und Modellanalyse . . . . .	126
7.2	Das neoklassische Wachstumsmodell . . . . .	129
7.2.1	Grundlegende Modellgleichungen . . . . .	129
7.2.2	Stabilität des Wachstumsgleichgewichts . . . . .	132
7.2.3	Abschreibungen und technischer Fortschritt . . . . .	133
7.2.4	Analyse mit realen Daten . . . . .	135
7.3	Das Neu- <i>Keynesianische</i> Standardmodell . . . . .	139
7.3.1	Zeitdiskrete Grundgleichungen . . . . .	140
7.3.2	Das zeitstetige NKM-Modell . . . . .	142
7.3.3	Der Nominalzins als geldpolitische Instrumentenvariable . . . . .	147
7.4	Die zeitverschobene Konsumwirkung . . . . .	152
7.4.1	<i>Taylor</i> -linearisiertes Konsummodell . . . . .	153
7.4.2	Höhere <i>Taylor</i> -Entwicklungen des Konsummodells . . . . .	155
<b>8</b>	<b>Nichtlineare ökonomische Modelle</b> . . . . .	159
8.1	IS-LM-AD-Hybridmodell . . . . .	159
8.1.1	Grundlegende Modellgleichungen . . . . .	159
8.1.2	Investitions-, Spar- und Liquiditätspräferenzfunktion . . . . .	164
8.1.3	Simulation des IS-LM-AD-Modells . . . . .	166
8.2	Goodwin's Wachstumskreislauf . . . . .	169
8.2.1	Goodwin's Modellhypthesen . . . . .	169
8.2.2	<i>Lotka-Volterra</i> -Form . . . . .	172
8.2.3	Beschäftigungspolitik und <i>Rössler</i> -Attraktor . . . . .	176
8.3	Aggregierte Produktion . . . . .	179
8.3.1	Die Produktionsstruktur . . . . .	180
8.3.2	Datenexploration . . . . .	181
8.3.3	State-Space Modell und Parameterschätzung . . . . .	186
8.3.4	Prognose des Brutto-Inlandsprodukts . . . . .	190
8.3.5	Inverses Vorzeichen der Substitutionselastizität . . . . .	191
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung</b> . . . . .	195

<b>Anhang A</b> .....	199
A.1 <i>Gauß-Hermite-Quadratur</i> .....	199
A.2 <i>Hodrick-Prescott-Filter</i> .....	202
<b>Literaturverzeichnis</b> .....	205
<b>Index</b> .....	211