Back-reaction of perturbations on gray solitons in dilute Bose gases

Dissertation

Philip B. Walczak

Vom Fachbereich Physik der Technischen Universität Kaiserslautern zur Verleihung des akademischen Grades „Doktor der Naturwissenschaften“ genehmigte Dissertation

Betreuer: Prof. Dr. James R. Anglin
Zweitgutachter: Prof. Dr. Sebastian Eggert

Datum der wissenschaftlichen Aussprache: 25. Mai 2012

D 386

Berichte aus der Physik

Philip B. Walczak

Back-reaction of perturbations on gray solitons in dilute Bose gases

D 386 (Diss. Technische Universität Kaiserslautern)

Shaker Verlag
Aachen 2012

Bibliographic information published by the Deutsche Nationalbibliothek
The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available in the Internet at http://dnb.d-nb.de.

Zugl.: Kaiserslautern, TU, Diss., 2012

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-1213-2
ISSN 0945-0963

Shaker Verlag GmbH • P.O. BOX 101818 • D-52018 Aachen
Phone: 0049/2407/9596-0 • Telefax: 0049/2407/9596-9
Internet: www.shaker.de • e-mail: info@shaker.de

Zusammenfassung

Das Hauptthema dieser Arbeit ist die Rückreaktion von Anregungen mit kleinen Amplituden auf graue Solitonen in quasi-eindimensionalen schwach wechselwirkenden verdünnten Bose-kondensierten Gasen. Diese Systeme sind von besonderem Interesse, da sie unter anderem physikalische Fragestellungen rund um die Bildung kollektiver Freiheitsgrade aufwerfen.

Ein wesentlicher Bestandteil der vorliegenden Arbeit ist das Resultat einer Linearisierung der Gross-Pitaevskii-Gleichung um die Hintergrundlösung des grauen Solitons. Die Linearisierung entspricht einer systematischen Entwicklung der Heisenbergschen Bewegungsgleichung nach dem verdünnten Gasparameter bis einschließlich erster Ordnung. Die Lösungen der linearisierten Bewegungsgleichung, auch unter dem Namen Bogoliubov–de Gennes-Gleichung bekannt, werden mit einer Methode hergeleitet, die der Faktorisierung aus der Streutheorie ähnelt. Dazu wird die Feldamplitude anhand von Normalmoden mit reellen Amplituden und harmonischer Zeitentwicklung dargestellt. Jene repräsentieren die elementaren Anregungen des Systems. Für das unendliche System ohne Randbedingung sind die gewonnenen Resultate exakt gültig, und können außerdem näherungsweise, bis auf exponentiell kleine Korrekturen, auf ein periodisches System endlicher Länge übertragen werden. Zudem kann man bestätigen, dass die Normalmoden einen vollständigen und orthonormalen Funktionensatz bilden.

Der Vorteil der reellen Variablen besteht darin, dass sich die Moden mit einer natürlichen Frequenz von Null, die sogenannten Nullmoden, direkt aus der quadratischen Hamiltonfunktion herleiten lassen und sich an das untere Ende des (quasi-)kontinuierlichen Spektrums der Moden endlicher Frequenz einfügen. Hierbei ist eine diskrete Nullmode mit negativer Masse hervorzuheben, die mit der räumlichen Translation des Solitons verknüpft ist. Es wird gezeigt, dass diese Zuordnung jedoch nicht so eindeutig ist wie üblicherweise angenommen, denn die Nullmoden können über eine kanonische Transformation gemischt werden, obwohl ihre Massen unterschiedliches Vorzeichen besitzen.

Allgemein lässt die analytische Form der Normalmodenlösungen sofort den Schluss zu, dass graue Solitonen transparent für elementare Anregungen sind. Allerdings tritt beim Durchgang der Anregungen durch das Soli-

ton ein wohldefinierter, wellenlängenabhängiger Phasensprung der Anregungen auf. Dieser Phasensprung stellt die Grundlage der Wechselwirkung zwischen grauen Solitonen und jeglichen Anregungen dar.

Zur Untersuchung der Wechselwirkung werden Wellenpaketanregungen mit endlicher Wellenlänge betrachtet, die sich aus einer ausgewählten Superposition von Normalmoden ergeben. Dazu wird eine Darstellung mit komplexen Amplituden genutzt, welche den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren von Quasiteilchen-Anregungen der zweiten Quantisierung entsprechen. In einer asymptotischen Betrachtung wird gezeigt, dass Wellenpakete aufgrund eines Phasensprungs beim Durchgang durch das Soliton eine endliche räumliche Verschiebung im Vergleich zur Propagation in konstantem Hintergrund erfahren. Somit hat die Präsenz des Solitons einen nichttrivialen Effekt auf das Wellenpaket. Da Wellenpakete Dichteänderungen entsprechen, ist mit der Verschiebung in erster Ordnung in der systematischen Entwicklung nach dem verdünnten Gasparameter ein zusätzlicher Sprung der zugeordneten Schwerpunktsbewegung in zweiter Ordnung verbunden. Um weitere Effekte, im speziellen die Rückreaktion auf das Soliton, zu bestimmen, muss daher auch die Bewegungsgleichung in dieser Ordnung betrachtet werden. Anhand einer asymptotischen Lösung für die Wellenpaketanregung in zweiter Ordnung, kombiniert mit den exakten Erhaltungssätzen für die Teilchenzahl und den linearen Gesamtimpuls, erhält man letztlich eine analytische Formel für den Rückreaktionseffekt des Solitons. Es wird durch die Wechselwirkung mit den Wellenpaketen räumlich verschoben. Der Effekt wird durch numerische Integration der Gross-Pitaevskii-Gleichung quantitativ bestätigt.

Die Rückreaktion des Solitons unter dem Einfluss von hydrodynamischen Anregungen wird innerhalb einer Boundary-Layer-Theorie mit mehreren Skalen studiert. Diese Art der Anregung ist charakterisiert durch Wellenlängen, die deutlich größer als die charakteristische Längenskala des Kondensats sind. Dabei stellen die oben erwähnten Wellenpaketanregungen für hydrodynamische Wellenlängen den Spezialfall kleiner Amplitude innerhalb der Boundary-Layer-Theorie dar. Mit dieser Theorie lässt sich eine Bewegungsgleichung für das Soliton herleiten, deren Lösung einen geschlossenen Ausdruck für die Solitonverschiebung ergibt. Das Resultat hängt maßgeblich vom Phasenprofil des Anregungspulses ab. Zudem lässt sich das Ergebnis als ein Grenzfall unendlicher Wellenlänge der weiter oben erwähnten Rückreaktionsformel interpretieren. Für Anregungspulse mit gaußförmigem Dichteprofil wird der Ausdruck explizit ausgewertet und anschließend durch numerische Integration der Gross-Pitaevskii-Gleichung verifiziert.

In beiden Fällen kann man die Ergebnisse für die Rückreaktion mittels der involvierten Geschwindigkeiten qualitativ erklären. Je kleiner die Differenz zwischen der Gruppengeschwindigkeit der Anregung und dem Soliton ist, desto länger ist die Wechselwirkungszeit und umso größer ist die Rückreaktion des Solitons.

Abstract

The main topic of this work is the back-reaction from perturbations of small amplitude on gray solitons in weakly interacting quasi-one-dimensional dilute Bose gases. These systems are of special interest, since they raise physical questions connected with the emergence of collective degrees of freedom.

An essential part of the present work constitutes the result of a linearization of the Gross-Pitaevskii equation about a gray-soliton background solution. The linearization corresponds to a systematic expansion of the Heisenberg equation of motion in the dilute gas parameter up to and including first order. The solutions to the linearized equation of motion, also known as Bogoliubov–de Gennes equation, are derived with a method similar to the factorization from scattering theory. To this end the field amplitude is expanded with respect to normal modes with real amplitude and harmonic time evolution, which represent the elementary excitations of the system. The results are exact for the infinite system without boundary conditions, but may be transferred to finite systems with periodic boundary conditions up to exponentially small errors. Furthermore it is confirmed that the normal mode solutions indeed form a complete and orthonormal set of functions.

The advantage of the real amplitude representation is that the modes with natural frequency zero, the so-called zero modes, are straightforwardly found from the quadratic Hamilton function, and they join at the bottom of a (quasi-)continuous spectrum of normal modes with finite frequency. In particular, a discrete zero mode with negative mass is obtained, which is associated with a spatial translation of the soliton. However, it is clarified that this assignment is not as unambiguous as commonly assumed, since a mixture of the zero modes is allowed by canonical transformation although their masses have different signs.

From the analytical form of the normal mode solutions one can immediately conclude that gray solitons are in general transparent to excitations, yet the crossing of the excitations through the soliton is accompanied with a well-defined wavelength-dependent phase shift. This phase shift represents the foundation of the interaction between gray solitons and excitations of any kind.

In order to study the interaction, wave-packet excitations of finite wavelength are considered that are constructed as a certain superposition of the normal modes. Here the complex amplitude representation is used, which corresponds to the annihilation and creation operators of quasiparticle excitations of second quantization. By asymptotic considerations it becomes apparent that wave packets, due to the phase shift when passing the soliton, experience a finite spatial displacement in comparison to propagation in constant background. Therefore, the presence of the soliton has a nontrivial effect on the wave excitation. Since wave packets are density perturbations, their displacement at first order in the systematic expansion in the dilute gas parameter necessarily means a displacement of the center of mass, but at second order of the expansion. To determine further effects, such as the back-reaction on the soliton, one is forced to solve the equation of motion at second order. Combining the asymptotic second order solution for the wave perturbation and the exact conservation laws of total linear momentum and total particle number, an analytical formula for the back-reaction effect on the soliton is derived. Upon interaction with the wave perturbation the soliton is displaced in space. The effect is verified by numerical integration of the Gross-Pitaevskii equation.

The back-reaction of solitons under the influence of hydrodynamic perturbations, which are characterized by wavelengths much larger than the healing length of the condensate, are studied within a multiple scale boundary layer theory. In this respect, the aforementioned wave packets of the same wavelength represent the special case of small amplitude excitations within this theory. One can derive an equation of motion for the soliton, whose solution yields a closed expression for the soliton displacement. It is mainly determined by the phase profile of the excitation pulse. Furthermore the expression for the soliton shift may be interpreted as the limit of infinite wavelength of the previous result. The formula is explicitly evaluated for perturbation pulses with Gaussian density profile and subsequently confirmed by numerical integration of the Gross-Pitaevskii equation.

In either case the results for the back-reaction can be explained qualitatively in terms of the involved velocities. The smaller the difference between the group velocity of the excitation and the soliton speed is, the longer the interaction time and the larger the back-reaction of the soliton is.

Contents