Operations Research

Kai Watermeyer

Projektplanung mit partiell erneuerbaren Ressourcen

Entwicklung und Untersuchung von Branch-and-Bound-Verfahren

SHAKER VERLAG

Operations Research

Kai Watermeyer

Projektplanung mit partiell erneuerbaren Ressourcen

Entwicklung und Untersuchung von Branch-and-Bound-Verfahren

Shaker Verlag
Düren 2021

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Zugl.: Clausthal, Techn. Univ., Diss., 2020

D 104 (Diss. TU Clausthal)

Copyright Shaker Verlag 2021
Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungs-anlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-7931-9
ISSN 1862-6327

Shaker Verlag GmbH • Am Langen Graben 15a • 52353 Düren
Telefon: 02421 / 99 0 11 - 0 • Telefax: 02421 / 99 0 11 - 9
Internet: www.shaker.de • E-Mail: info@shaker.de

Vorwort

Die vorliegende Dissertation ist während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Abteilung für Betriebswirtschaftslehre und Unternehmensforschung am Institut für Wirtschaftswissenschaft der Technischen Universität Clausthal entstanden.

Ein besonderer Dank gilt meinen Doktorvater Prof. Dr. Jürgen Zimmermann, der mir nicht nur die Möglichkeit zur Promotion eröffnet hat, sondern darüber hinaus auch stets zur fachlichen Diskussion bereit stand. Herrn Prof. Dr. Christoph Schwindt danke ich für die Übernahme des Korreferats sowie für seine interessanten Anregungen bezüglich weiterführender Forschungsmöglichkeiten.

Weiterhin möchte ich mich ganz besonders bei all denjenigen bedanken, die mich auf meinem Weg der Promotion begleitet und unterstützt haben. Gemeinsame Mittags- und Kaffeepausen sowie gemeinsame Unternehmungen haben die Zeit am Institut in besonderer Weise bereichert. Meinen heutigen und ehemaligen Kollegen danke ich darüber hinaus für die konstruktive und freundschaftliche Zusammenarbeit. Für die kritische Durchsicht des Manuskripts danke ich Herrn Philipp Aschersleben, Frau Dr. Anja Heßler, Frau Mareike Karnebogen und Herrn Max Reinke.

Abschließend danke ich meiner Familie, die mich zu jeder Zeit unterstützt hat.

Goslar, Februar 2021 *Kai Watermeyer*

Zusammenfassung

Die Implementierung eines geeigneten und zielgerichteten Projektmanagements stellt für viele Unternehmen im Hinblick auf kürzer werdende Innovationszyklen und sich verändernde Marktanforderungen einen immer wichtigeren Erfolgsfaktor dar. Eine entscheidende Bedeutung kommt dabei vor allem der Projektplanung als Bindeglied zwischen der Vorbereitungs- und der Ausführungsphase eines Projekts zu. Insbesondere die ressourcenbeschränkte Projektplanung kann durch die Bestimmung effizienter und kostengünstiger Einsatzpläne für begrenzt verfügbare Ressourcen einen wichtigen Beitrag zur Wettbewerbsfähigkeit eines Unternehmens leisten.

Die meisten Modelle der ressourcenbeschränkten Projektplanung gehen vereinfachend davon aus, dass erneuerbare Ressourcen in bestimmten Mengen in jeder Zeitperiode für die Ausführung von Vorgängen zur Verfügung stehen, die durch Vorrangbeziehungen miteinander verbunden sind. Diese einschränkenden Annahmen führen jedoch dazu, dass praxisrelevante Restriktionen wie Arbeitszeitvereinbarungen oder Vorgaben zur Höchstauslastung von Maschinen durch Modelle der ressourcenbeschränkten Projektplanung nicht abgebildet werden können. Eine Möglichkeit, um komplexere Restriktionen in die Modelle einzubinden, stellen sogenannte partiell erneuerbare Ressourcen dar, die Kapazitätsrestriktionen auch über mehrere Zeitperioden modellieren können. Durch diese Art von Ressourcen können unter anderem maximale Arbeitsstunden am Wochenende oder vorgeschriebene Pausenzeiten von Arbeitskräften modelliert werden, die durch klassische Modelle der Projektplanung nicht abgebildet werden können. Weitere praxisrelevante Restriktionen wie technologisch bedingte Zeitfenster für die Ausführung von Fertigungsprozessen können zudem durch zeitliche Mindest- und Höchstabstände bzw. durch allgemeine Zeitbeziehungen zwischen den Vorgängen eines Projekts dargestellt werden.

In der vorliegenden Arbeit wird das Projektdauerminimierungsproblem mit allgemeinen Zeitbeziehungen und partiell erneuerbaren Ressourcen (RCPSP/max-π) untersucht. Ein Schwerpunkt liegt dabei auf der Entwicklung von Branch-and-Bound-Verfahren, die auf unterschiedlichen Enumerationsschemata basieren. Es werden zwei relaxationsbasierte und ein konstruktionsbasiertes Branch-and-Bound-Verfahren vorgestellt, deren Leistungsfähigkeit anhand geeigneter Testinstanzen durch eine experimentelle Performance-Analyse untersucht werden. Die Ergebnisse der Analysen zeigen, dass eines der relaxati-

onsbasierten Verfahren, das die zeitzulässigen Startzeitpunkte der Vorgänge des Projekts schrittweise in disjunkte Mengen zerlegt, die beiden anderen Ansätze dominiert. Aus einem weiterführenden Vergleich mit dem MILP-Solver IBM CPLEX sowie den besten bislang bekannten Näherungsverfahren zur Projektdauerminimierung mit partiell erneuerbaren Ressourcen wird zudem die vorteilhafte Performance des dominanten Branch-and-Bound-Verfahrens bestätigt.

In der vorliegenden Arbeit wird weiterhin gezeigt, dass der Einsatz partiell erneuerbarer Ressourcen ein weites Feld an Modellierungsmöglichkeiten eröffnet, das auch andere Konzepte der Projektplanung umfasst, die über die letzten Jahrzehnte entwickelt wurden. Basierend auf diesen Ergebnissen wird zudem gezeigt, dass exakte Verfahren für das RCPSP/max-π auch zur Lösung anderer bekannter Projektdauerminimierungsprobleme aus der Literatur eingesetzt werden können.

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis

ACO	Absolute Capacity Overrun
AMAR	Average Maximal Additional Resource Consumption
CBB	Konstruktionsbasiertes Branch-and-Bound-Verfahren
DFS	Depth-First Search
DST	Delayed Start Time
EFF	Early Free Float
ILP	Ganzzahliges lineares Programm (engl. Integer Linear Program)
LIFO	Last-In-First-Out
LST	Latest Start Time
LT	Lowest Time
MILP	Gemischt-ganzzahliges lineares Programm (engl. Mixed-Integer Linear Program)
MRC	Maximal Resource Consumption
NCA	Number of Consuming Activities
PBB	Partitionsbasiertes Branch-and-Bound-Verfahren
PF	Path Following
PV	Priority Value
RBB	Relaxationsbasiertes Branch-and-Bound-Verfahren
RCO	Relative Capacity Overrun
RCPSP	Ressourcenbeschränktes Projektplanungsproblem (engl. Resource-Constrained Project Scheduling Problem)
RCPSP/max	RCPSP mit allgemeinen Zeitbeziehungen
RCPSP/max-c	RCPSP/max mit diskreten kumulativen Ressourcen
RCPSP/max-cal	RCPSP/max mit Kalendern
RCPSP/max-cc	RCPSP/max mit kontinuierlichen kumulativen Ressourcen
RCPSP/max-π	RCPSP/max mit partiell erneuerbaren Ressourcen
RCPSP/π	RCPSP mit partiell erneuerbaren Ressourcen
RCR	Remaining Capacity Reduction

RU	Resource Usage
RUT	Resource Usage per Time
SPS	Scattered-Path-Suche
ST	Slack Time
TF	Total Float
TMAR	Total Maximal Additional Resource Consumption
TS	Total Successor
ULT	Usage-Limitation-Technik
UPT	Usage-Preserving-Technik

Symbolverzeichnis

$\emptyset$	Leere Menge
0	Vorgang „Projektbeginn“
$\mathcal{AS}$	Menge der aktiven Schedules
$\mathcal{B}$	Anzahl der Startzeitunterbrechungen der Startzeitbeschränkung W
$\mathcal{B}_i$	Anzahl der Startzeitunterbrechungen der Startzeitbeschränkung W_i von Vorgang $i \in V$
$\mathcal{C}$	Menge der aktuell eingeplanten Vorgänge eines Projekts
$\bar{\mathcal{C}}$	Menge der aktuell nicht eingeplanten Vorgänge eines Projekts
$\bar{d}$	Vorgegebene maximale Projektdauer
d_{ij}	Länge eines längsten Wegs von Vorgang $i \in V$ zu Vorgang $j \in V$ in Projektnetzplan N
$\widetilde{d}_{ij}(W,t)$	Zeitabstand zwischen Zeitpunkt t und dem frühestmöglichen W-zulässigen Startzeitpunkt von Vorgang $j \in V$, falls Vorgang $i \in V$ nicht vor Zeitpunkt t startet; $\widetilde{d}_{ij}(W,t) := ES_j(W,i,t) - t$
$\widehat{d}_{ij}(W,t)$	Zeitabstand zwischen Zeitpunkt t und dem spätestmöglichen W-zulässigen Startzeitpunkt von Vorgang $j \in V$, falls Vorgang $i \in V$ nicht nach Zeitpunkt t startet; $\widehat{d}_{ij}(W,t) := LS_j(W,i,t) - t$
δ	Vektor der Zeitabstände $\delta := (\delta_{ij})_{(i,j)\in E}$
δ_{ij}	Zeitabstand zwischen den Startzeitpunkten der Vorgänge $i,j \in V$ für Vorgangspaar $(i,j) \in E$
$\widetilde{\delta}_{ij}(W,t)$	Zeitabstand zwischen dem frühesten Startzeitpunkt $\tau \in W_j$ von Vorgang $j \in V$, der die Bedingung $\tau \geq t + \delta_{ij}$ erfüllt, und Startzeitpunkt t von Vorgang $i \in V$ für Vorgangspaar $(i,j) \in E$
$\widehat{\delta}_{ij}(W,t)$	Zeitabstand zwischen dem spätesten Startzeitpunkt $\tau \in W_i$ von Vorgang $i \in V$, der die Bedingung $\tau \leq t - \delta_{ij}$ erfüllt, und Startzeitpunkt t von Vorgang $j \in V$ für Vorgangspaar $(i,j) \in E$
D	Distanzmatrix $D := (d_{ij})_{i,j\in V}$
$\widetilde{D}(W)$	Mindestabstandsmatrix $\widetilde{D}(W) := ([\widetilde{d}_{ij}(W,t)])_{i,j\in V}$
$\widehat{D}(W)$	Höchstabstandsmatrix $\widehat{D}(W) := ([\widehat{d}_{ij}(W,t)])_{i,j\in V}$
$\Delta_{ik}^u(t)$	Veränderung der Belegung von Ressource $k \in \mathcal{R}$ durch Vorgang $i \in V$, falls der Startzeitpunkt t von Vorgang i um eine Zeiteinheit erhöht wird; $\Delta_{ik}^u(t) := r_{ik}^u(t+1) - r_{ik}^u(t)$

$e_i(t)$	Endzeitpunkt des Startzeitintervalls I der Startzeitbeschränkung W_i von Vorgang $i \in V$, dem Zeitpunkt t zugeordnet ist ($t \in I$)
E	Menge der Vorgangspaare eines Projekts, zwischen denen eine Zeitbeziehung vorliegt; $E \subset V \times V$
ES	Frühester zeitzulässiger Schedule
ES_i	Frühester zeitzulässiger Startzeitpunkt von Vorgang $i \in V$
$ES(W)$	Frühester W-zulässiger Schedule
$ES_i(W)$	Frühester W-zulässiger Startzeitpunkt von Vorgang $i \in V$
$ES(W, \alpha, t_\alpha)$	Frühestmöglicher W-zulässiger Schedule, falls Vorgang $\alpha \in V$ nicht vor Zeitpunkt t_α startet
$ES_i(W, \alpha, t_\alpha)$	Frühestmöglicher W-zulässiger Startzeitpunkt von Vorgang $i \in V$, falls Vorgang $\alpha \in V$ nicht vor Zeitpunkt t_α startet
$\mathcal{E}$	Menge der einplanbaren Vorgänge in einer Iteration eines Konstruktionsverfahrens; $\mathcal{E} \subseteq \bar{\mathcal{C}}$
γ	Domain-Konsistenztest, $(\gamma(W))_i \subseteq W_i$ für alle Vorgänge $i \in V$
Γ	Menge aus Domain-Konsistenztests
$\mathcal{H}$	Menge aller ganzzahligen Zeitpunkte des Planungshorizonts; $\mathcal{H} := \{0, 1, \ldots, \bar{d}\}$
$\mathcal{I}$	Anzahl der Belegungsintervalle in den Mengen Π_k über alle Ressourcen $k \in \mathcal{R}$
$\mathcal{I}_k$	Anzahl der Belegungsintervalle in der Menge Π_k der Ressource $k \in \mathcal{R}$
LB	Untere Schranke für die kürzeste Projektdauer über alle zulässigen Schedules im Suchraum eines Enumerationsknotens
$LB0^\pi$	Untere Schranke für die kürzeste Projektdauer über alle Schedules $S \in \mathcal{S}(W)$; $LB0^\pi := ES_{n+1}(W)$
LBD^π	Destruktive untere Schranke für die kürzeste Projektdauer über alle Schedules $S \in \mathcal{S}(W)$
LS	Spätester zeitzulässiger Schedule
LS_i	Spätester zeitzulässiger Startzeitpunkt von Vorgang $i \in V$
$LS(W)$	Spätester W-zulässiger Schedule
$LS_i(W)$	Spätester W-zulässiger Startzeitpunkt von Vorgang $i \in V$
$LS(W, \alpha, t_\alpha)$	Spätestmöglicher W-zulässiger Schedule, falls Vorgang $\alpha \in V$ nicht nach Zeitpunkt t_α startet
$LS_i(W, \alpha, t_\alpha)$	Spätestmöglicher W-zulässiger Startzeitpunkt von Vorgang $i \in V$, falls Vorgang $\alpha \in V$ nicht nach Zeitpunkt t_α startet
Λ	Liste der generierten direkten Nachfolger eines Enumerationsknotens in einem Branch-and-Bound-Verfahren
$n+1$	Vorgang „Projektende“
N	Projektnetzplan $N := (V, E, \delta)$

ν	Markierung aller Vorgänge $i \in V$; $\nu := (\nu_i)_{i \in V}$
ν_i	Markierung des Vorgangs $i \in V$
$\mathcal{O}$	Landausches Symbol; für $f, g : \mathbb{N}^k \mapsto \mathbb{R}_{\geq 0}$ gelte, dass $g \in \mathcal{O}(f)$, wenn eine Konstante $c > 0$ und eine positive ganze Zahl n existieren, sodass $g(x) \leq cf(x)$ für alle x mit $x_i \geq n$ für ein $i = 1, 2, \ldots, k$
$\mathcal{OS}$	Menge der optimalen Schedules
Ω	Menge der noch zu untersuchenden Knoten innerhalb eines Enumerationsverfahrens
$\bar{p}$	Längste Ausführungsdauer über alle Vorgänge $i \in V$; $\bar{p} := \max_{i \in V} p_i$
p_i	Ausführungsdauer von Vorgang $i \in V$
$Pred(i)$	Menge der direkten Vorgänger von Vorgang $i \in V$ in Projektnetzplan N; $Pred(i) := \{h \in V \mid (h, i) \in E\}$
$\mathcal{P}$	Menge aller Zeitperioden des Planungshorizonts; $\mathcal{P} := \{1, 2, \ldots, \bar{d}\}$
Φ	Menge der generierten Schedules innerhalb eines Enumerationsverfahrens
Π_k	Menge aller Perioden, in denen Ressource $k \in \mathcal{R}$ durch die Ausführung eines Vorgangs in Anspruch genommen wird
$r_k^c(S)$	Inanspruchnahme der Ressource $k \in \mathcal{R}$ gemäß Schedule S; $r_k^c(S) := \sum_{i \in V_k} r_{ik}^c(S_i)$
$r_k^c(S^{\mathcal{C}})$	Inanspruchnahme der Ressource $k \in \mathcal{R}$ gemäß Teilschedule $S^{\mathcal{C}}$; $r_k^c(S^{\mathcal{C}}) := \sum_{i \in \mathcal{C}} r_{ik}^c(S_i)$
$\underline{r}_k^c(W)$	Summe der Mindestinanspruchnahmen $\underline{r}_{ik}^c(W)$ der Ressource $k \in \mathcal{R}$ durch alle Vorgänge $i \in V_k$
$r_{ik}^c(S_i)$	Inanspruchnahme der Ressource $k \in \mathcal{R}$ durch Vorgang $i \in V$ in Abhängigkeit vom Startzeitpunkt S_i; $r_{ik}^c(S_i) := r_{ik}^u(S_i)\, r_{ik}^d$
$\underline{r}_{ik}^c(W)$	Mindestinanspruchnahme der Ressource $k \in \mathcal{R}$ durch Vorgang $i \in V_k$ über alle Startzeitpunkte $t \in W_i \cap [ES_i(W), LS_i(W)]$
$r_{ik}^{c,min}(W)$	Mindestinanspruchnahme der Ressource $k \in \mathcal{R}$ durch Vorgang $i \in V$ über alle Startzeitpunkte $t \in W_i$
$r_{ikt}^{c,min}(W, D)$	Summe der Mindestinanspruchnahmen $r_{ijkt}^{c,min}(W, D)$ der Ressource $k \in \mathcal{R}$ durch alle Vorgänge $j \in V \setminus \{i\}$ und der Ressourceninanspruchnahme $r_{ik}^c(t)$ für den Startzeitpunkt $t \in W_i$ von Vorgang $i \in V$
$r_{ijkt}^{c,min}(W, D)$	Mindestinanspruchnahme der Ressource $k \in \mathcal{R}$ durch Vorgang $j \in V \setminus \{i\}$ über alle Startzeitpunkte $\tau \in W_j \cap [t + d_{ij}, t - d_{ji}]$ für einen Startzeitpunkt $t \in W_i$ von Vorgang $i \in V$
$r_k^{c,min}(W, \underline{S}, \overline{S})$	Summe der Mindestinanspruchnahmen $r_{ik}^{c,min}(W, \underline{S}_i, \overline{S}_i)$ der Ressource $k \in \mathcal{R}$ durch alle Vorgänge $i \in V_k$ für die Schedules $\underline{S}$ und $\overline{S}$
$r_{ik}^{c,min}(W, \underline{S}_i, \overline{S}_i)$	Mindestinanspruchnahme der Ressource $k \in \mathcal{R}$ durch Vorgang $i \in V$ über alle Startzeitpunkte $t \in W_i \cap [\underline{S}_i, \overline{S}_i]$

$r_{ikt}^{c,min}(W, \widetilde{D}, \widehat{D})$	Summe der Mindestinanspruchnahmen $r_{ijkt}^{c,min}(W, \widetilde{D}, \widehat{D})$ der Ressource $k \in \mathcal{R}$ durch alle Vorgänge $j \in V \setminus \{i\}$ und der Ressourceninanspruchnahme $r_{ik}^{c}(t)$ für den Startzeitpunkt $t \in W_i$ von Vorgang $i \in V$
$r_{ijkt}^{c,min}(W, \widetilde{D}, \widehat{D})$	Mindestinanspruchnahme der Ressource $k \in \mathcal{R}$ durch Vorgang $j \in V \setminus \{i\}$ über alle Startzeitpunkte $\tau \in W_j \cap [t+\widetilde{d}_{ij}(W,t), t+\widehat{d}_{ij}(W,t)]$ für einen Startzeitpunkt $t \in W_i$ von Vorgang $i \in V$
r_{ik}^{d}	Bedarf an Ressource $k \in \mathcal{R}$ durch Vorgang $i \in V$ in jeder Periode in Π_k, in der Vorgang i ausgeführt wird
$r_{ik}^{u}(S_i)$	Anzahl der Perioden in Π_k, in denen sich Vorgang $i \in V$ in Abhängigkeit vom Startzeitpunkt S_i in Ausführung befindet (Ressourcenbelegung)
$\underline{r}_{ik}^{u}(W)$	Mindestbelegung der Ressource $k \in \mathcal{R}$ durch Vorgang $i \in V_k$ über alle Startzeitpunkte $t \in W_i \cap [ES_i(W), LS_i(W)]$
$r_{ik}^{u,min}(W)$	Mindestbelegung der Ressource $k \in \mathcal{R}$ durch Vorgang $i \in V$ über alle Startzeitpunkte $t \in W_i$
$r_{ijkt}^{u,min}(W, D)$	Mindestbelegung der Ressource $k \in \mathcal{R}$ durch Vorgang $j \in V \setminus \{i\}$ über alle Startzeitpunkte $\tau \in W_j \cap [t + d_{ij}, t - d_{ji}]$ für einen Startzeitpunkt $t \in W_i$ von Vorgang $i \in V$
$r_{ijkt}^{u,min}(W, \widetilde{D}, \widehat{D})$	Mindestbelegung der Ressource $k \in \mathcal{R}$ durch Vorgang $j \in V \setminus \{i\}$ über alle Startzeitpunkte $\tau \in W_j \cap [t + \widetilde{d}_{ij}(W,t), t + \widehat{d}_{ij}(W,t)]$ für einen Startzeitpunkt $t \in W_i$ von Vorgang $i \in V$
R_k	Kapazität der partiell erneuerbaren Ressource $k \in \mathcal{R}$
$\mathcal{R}$	Menge der partiell erneuerbaren Ressourcen eines Projekts
$\mathcal{R}_i$	Menge der partiell erneuerbaren Ressourcen mit $r_{ik}^{d} > 0$ für den Vorgang $i \in V$; $\mathcal{R}_i := \{k \in \mathcal{R} \mid r_{ik}^{d} > 0\}$
$\mathcal{R}^c(S)$	Menge der partiell erneuerbaren Ressourcen mit $r_k^c(S) > R_k$ für einen gegebenen Schedule S; $\mathcal{R}^c(S) := \{k \in \mathcal{R} \mid r_k^c(S) > R_k\}$
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}_{\geq 0}$	Menge der nicht-negativen reellen Zahlen
$s_i(t)$	Startzeitpunkt des Startzeitintervalls I der Startzeitbeschränkung W_i von Vorgang $i \in V$, dem Zeitpunkt t zugeordnet ist ($t \in I$)
sgn	Signumfunktion; $\operatorname{sgn}(x) := \lvert x \rvert / x$, falls $x \neq 0$; $\operatorname{sgn}(x) := x$, sonst
S	Vektor der Startzeitpunkte S_i aller Vorgänge $i \in V$ (Schedule)
$S^{\mathcal{C}}$	Teilschedule $S^{\mathcal{C}} := (S_i)_{i \in \mathcal{C}}$
S_i	Startzeitpunkt von Vorgang $i \in V$
$Succ(i)$	Menge der direkten Nachfolger von Vorgang $i \in V$ in Projektnetzplan N; $Succ(i) := \{j \in V \mid (i,j) \in E\}$
$\mathcal{S}$	Menge der zulässigen Schedules
$\mathcal{S}_R$	Menge der ressourcenzulässigen Schedules

$\mathcal{S}_T$	Menge der zeitzulässigen Schedules
$\mathcal{S}(W)$	Menge der zulässigen Schedules, die W-zulässig sind; $\mathcal{S}(W) := \mathcal{S}_T(W) \cap \mathcal{S}$
$\mathcal{S}_T(W)$	Menge der W-zulässigen Schedules; $\mathcal{S}_T(W) := \{S \in \mathcal{S}_T \mid S_i \in W_i$ für alle $i \in V\}$
$\mathcal{S}_T^{UB}(W)$	Menge der W-zulässigen Schedules mit $S_{n+1} < UB$; $\mathcal{S}_T^{UB}(W) := \widehat{\mathcal{S}}_T(W, n+1, UB-1)$
$\widetilde{\mathcal{S}}_T(W, \alpha, t_\alpha)$	Menge der W-zulässigen Schedules mit $S_\alpha \geq t_\alpha$; $\widetilde{\mathcal{S}}_T(W, \alpha, t_\alpha) := \{S \in \mathcal{S}_T(W) \mid S_\alpha \geq t_\alpha\}$
$\widehat{\mathcal{S}}_T(W, \alpha, t_\alpha)$	Menge der W-zulässigen Schedules mit $S_\alpha \leq t_\alpha$; $\widehat{\mathcal{S}}_T(W, \alpha, t_\alpha) := \{S \in \mathcal{S}_T(W) \mid S_\alpha \leq t_\alpha\}$
T_i	Eingeschränkte Menge der Einplanungszeitpunkte von Vorgang $i \in V$
$\mathcal{T}_i$	Menge aller zeitzulässigen Startzeitpunkte von Vorgang $i \in V$; $\mathcal{T}_i := [ES_i, LS_i] \cap \mathbb{Z}$
Θ_i	Menge der Einplanungszeitpunkte von Vorgang $i \in V$
$\bar{u}_{ik}$	Obere Schranke für die Belegung von Ressource $k \in \mathcal{R}$ durch Vorgang $i \in V$; $r_{ik}^u(S_i) \leq \bar{u}_{ik}$
UB	Obere Schranke für die kürzeste Projektdauer über alle zulässigen Schedules $S \in \mathcal{S}$
V	Menge der Vorgänge eines Projekts
V^e	Menge der fiktiven Vorgänge (Ereignisse) eines Projekts
V^r	Menge der realen Vorgänge eines Projekts
V_k	Menge der Vorgänge eines Projekts mit einem Bedarf nach Ressource $k \in \mathcal{R}$; $V_k := \{i \in V \mid r_{ik}^d > 0\}$
$V_k(S)$	Menge der Vorgänge, die Ressource $k \in \mathcal{R}$ für einen gegebenen Schedule S in Anspruch nehmen; $V_k(S) := \{i \in V_k \mid r_{ik}^u(S_i) > 0\}$
W	Startzeitbeschränkung $W := (W_i)_{i \in V}$
W_i	Startzeitbeschränkung von Vorgang $i \in V$; $W_i \subseteq \mathcal{H}$
$W_{ik}(\bar{u}_{ik})$	Menge aller zeitzulässigen Startzeitpunkte $t \in \mathcal{T}_i$ von Vorgang $i \in V$ mit einer Belegung von Ressource $k \in \mathcal{R}$, die $\bar{u}_{ik}$ nicht übersteigt; $W_{ik}(\bar{u}_{ik}) := \{t \in \mathcal{T}_i \mid r_{ik}^u(t) \leq \bar{u}_{ik}\}$
$W_{ij}^e(t)$	Menge aller Startzeitpunkte $\tau \in W_j$ von Vorgang $j \in V$, für die $t + d_{ij} \leq \tau \leq t - d_{ji}$ gilt
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Z}_{\geq 0}$	Menge der nicht-negativen ganzen Zahlen
$\mathbb{Z}_{>0}$	Menge der positiven ganzen Zahlen