Elemente der angewandten Zahlentheorie und Approximationen

Uwe Kraeft

2016

Berichte aus der Mathematik

Uwe Kraeft

Elemente der angewandten Zahlentheorie und Approximationen

Shaker Verlag
Aachen 2016

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-4300-6
ISSN 0945-0882

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen
Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9
Internet: www.shaker.de • E-Mail: info@shaker.de

Vorwort

Dieses Buch ist ein Ergänzungsband [KrVIIIa] zur „Einführung in die Angewandte Mathematik“ [KrVIII] des „Lehrgangs der Mathematik“. Dabei werden wenige grundlegende Kenntnisse [KrI], [KrII] und [KrIII] vorausgesetzt, so dass der Text auch für interessierte Schüler der höheren Gymnasialklassen lesbar sein sollte. Grundlage und Quelle für den ersten Teil des vorliegenden Textes sind neben der genannten „Einführung“ vor allem die 25 Bände der „Studies in Number Theory“ [Kr, Kr1-Kr24], die im Text aus Gründen der Lesbarkeit nur ausnahmsweise zitiert werden und von denen nur eine kleine für die Anwendung wichtige Teilmenge ausgewählt wurde, deren Elemente gewissermaßen das fundamentale „Handwerkszeug“ der Zahlentheorie darstellen (genaue Quellenangaben finden sich im Index [KrXIIa S. 93]).- Der zweite Teil stellt vor allem eine mathematische Ergänzung der Teile VI und X bis XIIa des „Lehrgangs der Mathematik“ dar.- Der dritte Teil behandelt biologische Anwendungen.

Das Buch gliedert sich somit in drei Teile:

I. Über die Zahlentheorie wurde in dieser Reihe in der „Einführung in die Mathematik“ [KrI S. 157] und insbesondere in der „Einführung in die Beweislehre“ [KrVII S. 47] bereits zusammenfassend berichtet. In diesem Text soll nun das Thema im Hinblick auf die Anwendung etwas ausführlicher dargestellt werden. Hier werden in 18 Kapiteln nach einer Einführung Kongruenzen, Lehrsätze mit Kongruenzen, Restklassen, die Euler Funktion $\varphi(n)$ und Carmichael Funktion $\lambda(n)$, Folgen, Darstellungen der natürlichen Zahlen, Brüche und Kettenbrüche, Zahldarstellungen, Diophantische Gleichungen, algebraische Zahlen, transzendente Zahlen, die Approximationen der Infinitesimalrechnung, komplexe und andere strukturierte Zahlen, die Primzahlverteilung, Primzahlen, zahlentheoretische Funktionen sowie die Faktorisierung in elementarer Weise dargestellt. Eine Literaturauswahl ist beigefügt. Die Literaturzitate betreffen wie in den vorangehenden Bänden nicht nur die Übernahme von Inhalten, sondern sind auch ein Hinweis für interessierte Leser, um mehr über ein Thema zu erfahren.

II. Die Numerische Mathematik im engeren Sinn, das ist die Aufstellung von Rechenvorschriften oder Algorithmen, steht in enger Beziehung zur Zahlentheorie. Viele der früheren manuell durchgeführten Methoden sind heute durch die Computerprogramme, die auf numerischen Algorithmen basieren, mehr oder weniger überflüssig geworden.

Eines der wichtigsten Themen in der Mathematik, den Naturwissenschaften und anderen Disziplinen bleibt die Aufstellung von plausiblen Funktionen. Die Ermittlung der Koeffizienten eines gegebenen Polynoms durch ein System aus gegebenen Gleichungen ist bereits aus der Schulmathematik bekannt. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Funktion tatsächlich ein Polynom gegebenen Grades ist. Ähnliches gilt für Funktionen, die sich aus bekannten physikalischen Theorien ergeben. Anders ist es bei zunächst unbekannten Funktionen der Naturwissenschaften, der Technik, der Wirtschaftswissenschaften und anderer Disziplinen. In den letzteren Fällen werden bei Vorliegen einer ausreichenden Zahl von Werten häufig statistische Methoden, wie zum Beispiel die mehrfache Regression, angewandt, um Formeln zu finden. Für viele Probleme sind das Polynome, die in den Naturwissenschaften mit immer höherem Grad zur besseren Anpassung zunehmend weniger mit Grundgesetzen übereinstimmen. Deswegen macht es Sinn, mathematisch geeignete Formeln als Hypothesen zu entwickeln, die plausibel erscheinen, und diese mit den bekannten Theorien zu prüfen. Diese Methode stand vermutlich auch am Anfang unserer heutigen physikalischen Theorien, wo „passende“ mathematische Formeln gesucht und mit den Messergebnissen verglichen wurden. Dabei ist außerhalb der Mathematik der rein mathematische Teil für das physikalische oder andere „Gesetz“ nicht beweiskräftig, wie immer wieder betont werden muss; allein die Übereinstimmung mit Messergebnissen im Gültigkeitsbereich entscheidet über die Plausibilität. Dabei bleiben alle Theorien nur Modelle, welche die physikalische „Realität“ mehr oder weniger gut und teilweise in mehrfacher Form beschreiben, was zum Beispiel auch für die Relativitätstheorie gilt. Die Übereinstimmung mit der Wirklichkeit ist auch bei den Grundgesetzen und Theorien sowie in der Astronomie prinzipiell nicht besser als der Wetterbericht, der ebenfalls auf Beobachtungen und Modellen beruht; eine scheinbare Genauigkeit bei gröberer Betrachtung zeigt sich bei immer feinerer Betrachtung als grobe Näherung.

Vereinfachende Annahmen sind in der theoretischen Physik üblich; sie gelten aber nicht als Approximationen. Letztere umfassen vor allem auch rein mathematische Näherungen, die in der Zahlentheorie behandelt werden (siehe Kapitel 13). Gegenstand des zweiten Teils dieses Textes, der sich vereinfacht gesagt mit einigen elementaren Möglichkeiten beschäftigt, wie aus einzelnen nichtperiodischen Variablen eine stetige Funktion gebildet werden kann, ist damit nur ein bestimmter, für die Anwendung in den Naturwissenschaften, der Technik und den Wirtschaftswissenschaften wichtiger Teil des Gesamtgebiets der Approximationen.

In Teil II werden in 12 Kapiteln nach einer Einführung in die Approximationen die Berechnung oder Approximation einer bekannten Funktion, die Interpolation, die mehrfache Regression, die Extrapolation von unbekannten Funktionen, komplexwertige Polynomfunktionen, die Berechnung und Darstellung von Funktionswerten und als Anwendungen die Röntgenstrahlung und Kernbindungsenergie, die Rotationsgeschwindigkeit der Galaxien, allgemeine Beispiele aus den Naturwissenschaften, Beispiele aus Wirtschaft und Technik sowie die Gültigkeit von Funktionen in elementarer Weise dargestellt. Eine kleine Literaturauswahl ist beigefügt.

III. Teil III behandelt ausgewählte Gebiete der Bioinformatik als Anwendung der Zahlentheorie und Approximationen und insbesondere die Sequenzanalyse des Genoms im Hinblick auf die molekulargenetische und morphologische Übereinstimmung. Einige ausgewählte Literaturangaben sind beigefügt.

Das Buch stellt die Meinung des Autors nach dem Studium der Literatur und dessen Kenntnissen dar. Der Inhalt wurde sorgfältig auf Fehler geprüft, die aber nicht gänzlich ausgeschlossen werden können. Eine Gewährleistung oder Garantie für die Richtigkeit des Textes kann nicht übernommen werden. Ich bin für entsprechende Hinweise oder Verbesserungsvorschläge dankbar.

Leimen, im November 2015 Uwe Kraeft

http://www.kannitverstan.net/

Auswahl von Symbolen

$\forall$	für alle
$\Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow$	hieraus folgt (in den angegebenen Richtungen)
$\in$	ist Element von (ist enthalten in)
$\notin$	ist kein Element von (ist nicht enthalten in)
$\cap, \cup, \subset$	Durchschnitt, Vereinigung, ist Teilmenge von
$\varnothing$	die leere Menge
A={a,b,c}	Beispiel einer Menge A mit den Elementen a, b und c
f	Abbildung
f(x)	Bild des Originals x
f^{-1}	inverse Abbildung
a, α, …	Elemente, Zahlen
-a, α^{-1}	inverse Elemente (Bezüglich Addition, Multiplikation)
m, n, …	oft natürliche Zahlen
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ...
p	oft Primzahl, Zähler eines Bruches oder auch andere Zahl
$\pi(n)$	Anzahl der Primzahlen kleiner gleich n
p_I, p_{II}	Primzahl I: 4m+1 mit $m \in \mathbb{N}$, Primzahl II: 4n-1 mit $n \in \mathbb{N}$
P	Primzahlen (P^1 einschließlich 1)
$\mathbb{N}^0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{Z}$	Ring der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	Körper der rationalen Zahlen a/b mit $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$
$\mathbb{Q}^+$	Menge der positiven rationalen Zahlen a/b mit $a,b \in \mathbb{N}$
$\mathbb{R}$	Körper der reellen Zahlen; $\mathbb{Q}(\mathbb{R})$ heißt $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$
$a=\alpha+i\beta$	$=\alpha+\beta i$ komplexe Zahl mit $\alpha,\beta \in \mathbb{Q}(\mathbb{R})$ und $i^2=-1$
$a^*=\bar{a}=\alpha-i\beta$	konjugiert komplexe Zahl
$a=\alpha+i\beta$	$=r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$ komplexe Zahl in Polarkoordinaten
$\mathfrak{R}(a)$, $\mathfrak{I}(a)$	Realteil, Imaginärteil von a
$\mathbb{C}$	$=\mathbb{Q}(i)$ or $\mathbb{R}(i)$: Körper der komplexen Zahlen
ζ	Einheitswurzel

$\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$	Vektor $\vec{x}$ mit den Komponenten x_1,x_2,x_3
$(x_1 \vert x_2 \vert x_3)$	Punkt mit den Koordinaten x_1,x_2,x_3 und Vektor $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$	Matrix A (Beispiel)
$\lvert A \rvert$, D(A)	Determinante der Matrix A
$\vec{x}\bullet(\vec{y}\times\vec{z})$	Skalarprodukt " $\bullet$" und Vektorprodukt " $\times$" von Vektoren
$\lvert\vec{x}\rvert$	$=\sqrt{\vec{x}\bullet\vec{x}}$ Absolutwert oder "Länge" des Vektors $\vec{x}$
$=$	genau gleich (identisch), nur in der Mathematik
$\equiv$	$a\equiv b \pmod c \Leftrightarrow a\equiv b_c \Leftrightarrow (a-b)/c\in\mathbb{Z}$ für $a,b\in\mathbb{Z}$, $c\in\mathbb{N}$
[a]	$=\{x;\, x\in\mathbb{Z}$ und $x\equiv a \pmod m\}$ Restklasse
$\cong$	so nah wie gewünscht, aber nicht gleich
$\approx$	ungefähr, gerundet, kann für große n angenähert werden
$\sim$	von ähnlicher Größenordnung, proportional
$\neq$	ungleich
$<,\leq,>,\geq$	kleiner, kleiner oder gleich, größer, größer oder gleich
$p,(q>1)\in\mathbb{N}$	p,q sind natürliche Zahlen, und es gilt q>1
$\prec,\succ$	kleiner, größer von komplexen Zahlen
n!	Produkt aller natürlicher Zahlen kleiner oder gleich n
$\binom{a}{b}$	$\dfrac{a!}{b!(a-b)!}=\dfrac{a(a-1)(a-2)\cdot\ldots\cdot(a-b+1)}{b(b-1)(b-2)\cdot\ldots\cdot 1}$

Binomialkoeffizient

$\{a_i\}=(a_i)$	$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ Folge von Zahlen a_i
$\sum_{i=1}^{n} a_i$	$=a_1+a_2+\ldots+a_n$, Reihe (Summe einer Folge (a_i)
$\prod_{i=1}^{n} a_i$	$=a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n$, Produkt
a^n	n-te Potenz von a (n Exponent)
a^{-n}	$1/a^n$
$a^{1/m}$	m-te Wurzel von a (zum Beispiel $a^{1/2}=\sqrt{a}$)
$a^{n/m}$	m-te Wurzel von a^n

sin mα = sin(mα)
ln x natürlicher Logarithmus von x mit $x=e^{\ln x}$

$f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$ erste Ableitung von f(x) mit dx≠0

F(x) Integral von f(x): $\int_a^b f(x)dx$ mit dx≠0

a|b a teilt b, a ist ein Faktor (Divisor) von b, $b\equiv 0_a$, $b\in\mathbb{Z}-\{0\}$, $a\in\mathbb{N}$
(a,b)=d ggT, größter gemeinsamer Teiler von a und b ist $d\in\mathbb{N}$
(a,b,c)=e ggT von a, b und c ist e
a,b,c Lösungstripel, zum Beispiel pythagoreisches Tripel
$\dfrac{p}{q}$ Verhältnis oder gemeiner Bruch mit $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$,
der eigentlich $\left|\dfrac{p}{q}\right|<1$ oder uneigentlich $\left|\dfrac{p}{q}\right|\geq 1$ sein kann
$\left(\dfrac{a}{p}\right)=1$ $=(a'/p)=1 \Leftrightarrow a^{(p-1)/2}\equiv 1_p$ (Legendre-Symbol)
$\left(\dfrac{a}{n}\right)$ $=(a'/p_1)(a'/p_2)(a'/p_3)\cdot\ldots$ mit $n=p_1p_2p_3\cdot\ldots$, $(p_i>2)\in P$ und
$(a,p_i)=1$ (Jacobi-Symbol)
$[a_0; a_1, a_2,\ldots]=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ldots}}}$ Kettenbruch; auch $[a_0, a_1, a_2,\ldots]$

Def. Definition
Anm. Anmerkung
ggt größter gemeinsamer Teiler
kgV kleinstes gemeinsames Vielfaches
PT pythagoreisches Tripel
LGS lineares Gleichungssystem
Weitere Symbole werden im Text erklärt.

Inhalt