

Statische und dynamische Analyse von Tragwerken aus funktional gradierten Materialien

Von der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät
der Universität Siegen genehmigte

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Ingenieurwissenschaften
(Dr.-Ing.)

vorgelegt von

Dipl.-Ing. Pedro Daniel Villamil Oostra
aus Ibagué (Kolumbien)

Referent: Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h. c. Chuanzeng Zhang

Korreferent: Prof. Dr.-Ing. habil. Ralf Müller

Tag der mündlichen Prüfung: 24.01.2017

Siegen, im Februar 2017

Berichte aus dem Bauwesen

Pedro Daniel Villamil Oostra

**Statische und dynamische Analyse von Tragwerken
aus funktional gradierten Materialien**

Shaker Verlag
Aachen 2017

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Zugl.: Siegen, Univ., Diss., 2017

Copyright Shaker Verlag 2017

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-5133-9

ISSN 0945-067X

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen

Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9

Internet: www.shaker.de • E-Mail: info@shaker.de

Kurzfassung

In zahlreichen Ingenieur Anwendungen kommen vermehrt Verbundwerkstoffe zum Einsatz, welche die besten Eigenschaften von verschiedenen Werkstoffen optimal kombinieren und so eine Anpassung an konkrete Anforderungen ermöglichen. Eine besondere Gruppe stellen die funktional gradierten Materialien (FGM) dar, bei denen ein fließender Übergang zwischen zwei oder mehr Grundkomponenten realisiert wird, um beispielsweise negative Effekte wie Delaminationen, Spannungskonzentrationen oder unerwünschte Wellenreflektionen an den Grenzflächen zwischen verschiedenen Schichten zu vermeiden. Im Bauwesen sind beispielsweise Strukturen aus Gradientenbeton möglich, die Optimierungsziele hinsichtlich des Tragverhaltens, der bauphysikalischen Eigenschaften und der Recyclingfähigkeit gleichermaßen erfüllen.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der mathematischen Beschreibung des statischen und dynamischen Verhaltens von funktional gradierten Stab- und Flächentragwerken. Bei der Herleitung der Bewegungsdifferentialgleichungen treten Kopplungen zwischen den longitudinalen und den transversalen Verschiebungskomponenten auf, die in der Fachliteratur häufig nicht genügend Berücksichtigung finden. In dieser Arbeit wird der Effekt dieser Kopplungen auf die Weg- und Kraftgrößen sowie auf die Eigenfrequenzen von statischen Systemen mit unterschiedlichen Auflagerbedingungen und Materialgradierungen untersucht. Bei Stabtragwerken ist in vielen Fällen eine analytische oder semi-analytische Lösung möglich, während bei Flächentragwerken numerische Methoden wie das Ritz-Verfahren oder die Finite-Elemente-Methode (FEM) herangezogen und auf das konkrete Problem erweitert werden. Anhand von numerischen Beispielen werden diese Lösungen verwendet, um mögliche Anwendungsgebiete für funktional gradierte Materialien im Bauwesen aufzuzeigen.

Abstract

Composites are used in numerous applications in engineering. They are able to optimally combine the best characteristics of different materials to adapt to specific requirements. A special form of composites are the functionally graded materials (FGM), which allow a smooth and continuous property variation between two or more basic components, in order to avoid negative effects like delaminations, stress concentrations or wave reflections in the interfaces between different layers. In Civil Engineering, it is possible to create structures of graded concrete to optimize equally the load-bearing behaviour, the thermal and acoustic properties as well as the recyclability of a building component.

The present thesis deals with the mathematical description of the static and dynamic behaviour of functionally graded beam and plate structures. The derivation of the differential equations of motion leads to a coupling between the longitudinal and the transversal displacement components, which has not been sufficiently taken into account in the relevant literature. In this thesis, the effect of these couplings on the displacements and internal forces as well as on the eigenfrequencies of structural systems with different boundary conditions and material gradations is analysed. In the case of beam structures, a closed-form solution or a semi-analytical solution can usually be found. By contrast, in the case of two-dimensional plane structures, numerical methods like the Ritz method or the finite element method (FEM) are applied and extended to obtain approximate solutions to this specific problem. These solutions are applied to numerical examples of structural elements in order to point out some possible applications for FGM in civil engineering.

Sinopsis

En muchas disciplinas de ingeniería se utilizan cada vez más los llamados materiales compuestos para una amplia gama de aplicaciones. Estos materiales reúnen las mejores características de diferentes materiales y permiten combinarlos óptimamente para adaptarlos a las necesidades concretas. Un grupo peculiar lo forman los materiales funcionalmente graduados, cuyas propiedades varían de forma suave y fluida entre un componente y otro para evitar efectos negativos como la exfoliación, las concentraciones de esfuerzos o las reflexiones indeseadas de ondas en las interfases entre las diferentes capas de materiales. En la ingeniería civil es posible diseñar estructuras de concreto graduado que cumplan a partes iguales los objetivos referentes al comportamiento estructural, a las propiedades de aislamiento térmico y acústico y a su capacidad de reciclaje.

La presente tesis aborda la descripción matemática del comportamiento estático y dinámico de vigas y placas hechas de materiales funcionalmente graduados. En la derivación de las ecuaciones diferenciales de movimiento surge un acoplamiento entre los desplazamientos longitudinales y transversales de la estructura, hecho que en la mayoría de publicaciones relevantes no es tomado suficientemente en cuenta. En esta tesis se analiza el efecto de este acoplamiento sobre las deformaciones, los esfuerzos internos y las frecuencias naturales de sistemas estructurales con diferentes gradaciones y varias condiciones de frontera. En el caso de las vigas es posible derivar soluciones analíticas o semianalíticas, mientras que para los elementos estructurales superficiales es necesario usar métodos de aproximación como el método de Ritz o el método de los elementos finitos (FEM) y extenderlos al problema concreto en cuestión. Estas soluciones son aplicadas a ejemplos concretos de la ingeniería civil con el objetivo de mostrar posibles aplicaciones de los materiales funcionalmente graduados en esta disciplina.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in der Zeit von 2010 bis 2016 während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter im Lehrstuhl für Baustatik der Universität Siegen. Ich möchte mich ganz besonders bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Chuanzeng Zhang dafür bedanken, dass er meine Promotion ermöglicht und betreut hat, und dass er durch wertvolle Gespräche und Anregungen zu ihrem Gelingen beigetragen hat. Aufgrund der guten Zusammenarbeit mit ihm in der Lehre und in der Forschung werde ich meine Zeit am Lehrstuhl immer in bester Erinnerung behalten.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Ralf Müller danke ich herzlich für das Interesse an meiner Arbeit, seine konstruktiven Hinweise und die Übernahme des Korreferats. Weiterhin möchte ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Ulrich P. Schmitz und Herrn Prof. Dr.-Ing. Claus-Peter Fritzen für das Mitwirken in der Promotionskommission danken.

Ein großer Dank gilt Herrn Dr.-Ing. Oliver Carl, der meine Arbeit mit großem Interesse verfolgt und durch viele wertvolle Diskussionen und motivierende Hinweise unterstützt hat.

Ich danke allen (aktuellen und ehemaligen) Mitarbeitern des Lehrstuhls, insbesondere Meike Stricker, Dipl.-Ing. Benjamin Ankay, M.Sc. Elias Perras und M.Sc. Kai Schwartpaul, für die kollegiale Arbeitsatmosphäre, die gute Zusammenarbeit und die interessanten fachlichen Diskussionen.

Für ihre Unterstützung, Ermutigung und Gebete möchte ich meinen Eltern Carlos und Elizabeth sowie meinen Schwiegereltern Dietmar und Bergit ganz herzlich danken, ebenso dem Rest der Familie und meinen Freunden. Meiner liebevollen Ehefrau Lisa bin ich von Herzen dankbar, dass sie mich mit größtem Verständnis und Geduld motiviert und mir in schwierigen Zeiten stets treu den Rücken freigehalten hat. Zusammen mit Ruben, Madita und Paula hat sie zudem für die nötige Abwechslung zu Hause gesorgt.

Mein größter Dank gebührt meinem Schöpfer und Heiland Jesus Christus. Er gab mir die richtigen Gedanken, die Kraft und das Gelingen für die Vollendung der Arbeit.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	V
Tabellenverzeichnis	IX
Symbolverzeichnis und Abkürzungen	XI
1. Einleitung	1
1.1. Funktional gradierte Materialien	1
1.2. Stand der Forschung	3
1.3. Ziele der Arbeit	4
1.4. Gliederung der Arbeit	5
2. Theoretische Grundlagen	7
2.1. Grundlagen der Elastizitätstheorie	7
2.1.1. Kinematik	7
2.1.2. Materialgesetz	9
2.1.3. Bewegungsgleichungen	11
2.1.4. Ebener Spannungszustand und ebener Verzerrungszustand	11
2.2. Differentialgleichungen für funktional gradierte Stab- und Flächentragwerke	14
2.2.1. Stäbe und Balken	15
2.2.2. Platten und Scheiben	22
2.2.2.1. Gradierte Flächentragwerke in kartesischen Koordinaten	23
2.2.2.2. Gradierte Flächentragwerke in Polarkoordinaten	28
2.3. Energiemethoden und Variationsprinzipien in der Elastizitätstheorie	31
2.3.1. Inneres und äußeres Potential von FGB	32
2.3.2. Inneres und äußeres Potential von FGP in kartesischen Koordinaten	33
2.3.3. Ritz-Verfahren	34
2.3.4. Methode der finiten Elemente (FEM)	35
3. Statische Analyse von funktional gradierten Strukturen	37
3.1. Statische Analyse funktional gradierter Stabtragwerke	37
3.1.1. Statik schubstarrer gradierter Stabtragwerke	37
3.1.1.1. Unsymmetrische Gradierung	38
3.1.1.2. Symmetrische Gradierung	44
3.1.2. Funktional gradierte Balken auf elastischer Bettung	45
3.1.3. Stabilität und Theorie II. Ordnung von gradierten Stabtragwerken	48

3.1.4.	Statik schubelastischer gradierter Stabtragwerke	49
3.1.5.	Numerische Analyse mithilfe der FEM	53
3.2.	Statik von gradierten ebenen Flächentragwerken in kartesischen Koordinaten	56
3.2.1.	Lösungsansätze in der Literatur	57
3.2.2.	Entkopplung der Differentialgleichungen und analytische Lösung . .	58
3.2.3.	Näherungslösung mit dem Ritz-Verfahren	63
3.2.4.	FEM für funktional gradierte Flächentragwerke	66
3.3.	Statik von gradierten kreisförmigen Flächentragwerken	69
3.3.1.	Gradierte Kreis- und Kreisringplatten unter rotationssymmetrischer Belastung	70
3.3.2.	Gradierte Kreis- und Kreisringplatten unter nicht-rotationssymme- trischer Belastung	74
3.4.	Anwendungsbeispiele für funktional gradierte Stabtragwerke	77
3.4.1.	Beispiel 1: Funktional gradiertes Sparrendach unter vertikaler Stre- ckenlast	77
3.4.2.	Beispiel 2: Funktional gradierter Stahlbetonbinder auf zwei Stützen mit Konsole	79
3.4.3.	Beispiel 3: Dickwandiger Hohlzylinder mit einer radialen Gradierung	86
3.4.4.	Beispiel 4: Einflüsse der Schubsteifigkeit und der Lagerungsbedin- gungen auf die Durchbiegung einfeldriger Stabtragwerke	88
3.5.	Anwendungsbeispiele für funktional gradierte Flächentragwerke	90
3.5.1.	Beispiel 1: Einflüsse der Gradierung und Lagerung auf die Weg- und Schnittgrößen von gradierten Rechteckplatten	90
3.5.2.	Beispiel 2: Funktional gradierte zweifeldrige Geschossdecke unter Flächenlast	95
3.5.3.	Beispiel 3: Funktional gradierte Kreisplatte unter nicht-rotations- symmetrischer Belastung	96
4.	Dynamische Analyse von funktional gradierten Strukturen	99
4.1.	Dynamische Analyse von funktional gradierten Stabtragwerken	99
4.1.1.	Freie Schwingungen von schubstarrn gradierten Stabtragwerken . .	99
4.1.2.	Freie Schwingungen von gradierten Balken auf elastischer Bettung .	105
4.1.3.	Freie Schwingungen von schubelastischen Stabtragwerken	105
4.1.4.	Numerische Eigenfrequenzbestimmung mit dem Ritz-Verfahren . . .	107
4.1.5.	Erzwungene Schwingungen	108
4.1.6.	Numerische Analyse mithilfe der FEM	110
4.2.	Dynamische Analyse von gradierten ebenen Flächentragwerken in kartesi- schen Koordinaten	112
4.2.1.	Freie Schwingungen von gradierten Rechteckplatten	112
4.2.2.	Entkopplung der Differentialgleichungen und analytische Lösung . .	112
4.2.3.	Numerische Bestimmung der Eigenfrequenzen mit dem Ritz-Verfahren	115
4.2.4.	Numerische Analyse mithilfe der FEM	118

- 4.3. Schwingungen von gradierten ebenen Flächentragwerken in Polarkoordinaten 118
 - 4.3.1. Lösung für Vollkreisplatten 121
 - 4.3.2. Lösung für Kreisringplatten 122
- 4.4. Anwendungsbeispiele für funktional gradierte Stabtragwerke 122
 - 4.4.1. Beispiel 1: Einflüsse von Schubsteifigkeit, Rotationsträgheit und Lagerungsbedingungen auf einfeldrige Stabtragwerke 122
 - 4.4.2. Beispiel 2: Eigenfrequenzen eines funktional gradierten Zweigelenkrahmens 124
 - 4.4.3. Beispiel 3: Eigenfrequenzen von funktional gradierten Balken auf elastischer Bettung 127
 - 4.4.4. Beispiel 4: Funktional gradierter Kragträger unter dynamischen Belastungen 130
- 4.5. Anwendungsbeispiele für funktional gradierte Flächentragwerke 134
 - 4.5.1. Beispiel 1: Einflüsse der Gradierung und der Lagerung auf die Eigenfrequenzen von Rechteckplatten 134
 - 4.5.2. Beispiel 2: Eigenfrequenzen und Eigenformen einer Geschossdecke . 137
- 5. Zusammenfassung und Ausblick 143**
- Anhang 147**
 - A. Koordinatensysteme und Differentialoperatoren 147
 - B. Vektoren und Matrizen zur FE-Berechnung von gradierten Flächentragwerken 149
 - B.1. Ansatzfunktionen des Scheiben-Platten-Elementes 149
 - B.2. Steifigkeitsmatrix des Scheiben-Platten-Elementes 151
 - B.3. Massenmatrix des Scheiben-Platten-Elementes 153
 - B.4. Vektoren der Elementknotenlasten für das Scheiben-Platten-Element 154